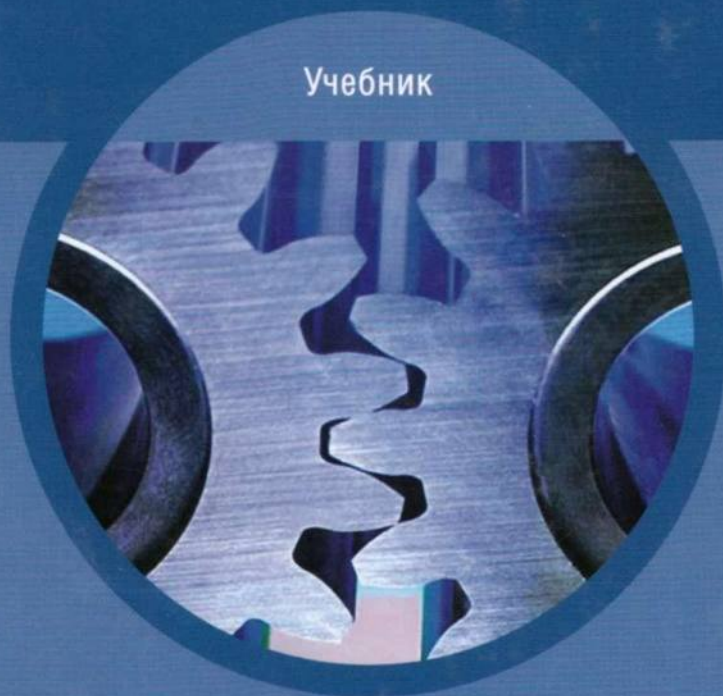


Профессиональное образование

Л. И. Вереина, М. М. Краснов

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебник



ОБЩЕПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ ДИСЦИПЛИНЫ

ACADEMA

Л. И. ВЕРЕИНА, М. М. КРАСНОВ

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УЧЕБНИК

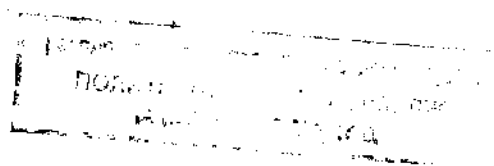
Рекомендовано

Федеральным государственным учреждением
«Федеральный институт развития образования»
в качестве учебника для использования
в учебном процессе образовательных учреждений,
реализующих программы среднего профессионального
образования по техническим специальностям

Регистрационный номер рецензии 036
от 12 марта 2010 г. ФГУ «ФИРО»

8-е издание, стереотипное

08340.



Москва
Издательский центр «Академия»
2014

УДК 624.04(075.32)
ББК 30.12я723
В313

Рецензенты:

зам. генерального директора ОАО «ЭНИМС»,
д-р техн. наук, проф. *Б. И. Черпаков*;
ст. преподаватель МГТУ им. К. Э. Циолковского
Б. И. Архангельский;
преподаватель высшей квалификационной категории.
Почетный работник СПО, зам. директора по учебно-воспитательной работе
ГОУ СПО «Московский политехнический колледж»
Е. Ю. Непужакина

Вереина Л. И.

В313 Техническая механика : учебник для студ. учреждений
сред. проф. образования / Л. И. Вереина, М. М. Краснов. —
8-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2014. —
352 с.

ISBN 978-5-4468-1166-3

Учебник предназначен для изучения предмета «Техническая механика»
и является частью учебно-методического комплекта по дисциплинам обще-
профессионального цикла для технических специальностей.

Изложены основы теоретической механики, сопротивления материалов,
деталей и механизмов машин; даны примеры расчетов. Приведены сведе-
ния об основных способах изменения механических свойств материалов и
тенденции развития конструкций машин и механизмов.

Учебник может быть использован при изучении общепрофессиональной
дисциплины ОП.02 «Техническая механика» в соответствии с ФГОС СПО
по специальностям технического профиля.

Для студентов учреждений среднего профессионального образования.

УДК 624.04(075.32)
ББК 30.12я723

*Оригинал-макет данного издания является собственностью
Издательского центра «Академия», и его воспроизведение любым
способом без согласия правообладателя запрещается*

© Вереина Л. И., Краснов М. М., 2011
© Образовательно-издательский центр «Академия», 2011
ISBN 978-5-4468-1166-3 © Оформление. Издательский центр «Академия», 2011

Уважаемый читатель!

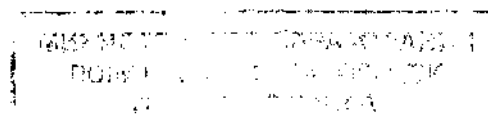
Данный учебник является частью учебно-методического комплекта по специальностям технического профиля.

Учебник предназначен для изучения общепрофессиональной дисциплины «Техническая механика».

Учебно-методические комплекты нового поколения включают в себя традиционные и инновационные учебные материалы, позволяющие обеспечить изучение общеобразовательных и общепрофессиональных дисциплин и профессиональных модулей. Каждый комплект содержит учебники и учебные пособия, средства обучения и контроля, необходимые для освоения общих и профессиональных компетенций, в том числе и с учетом требований работодателя.

Учебные издания дополняются электронными образовательными ресурсами. Электронные ресурсы содержат теоретические и практические модули с интерактивными упражнениями и тренажерами, мультимедийные объекты, ссылки на дополнительные материалы и ресурсы в Интернете. В них включен терминологический словарь и электронный журнал, в котором фиксируются основные параметры учебного процесса: время работы, результат выполнения контрольных и практических заданий. Электронные ресурсы легко встраиваются в учебный процесс и могут быть адаптированы к различным учебным программам.

Электронный образовательный ресурс «Техническая механика» находится в стадии разработки и будет выпущен в 2014 году.



Основные используемые обозначения

F	— сила
M	— момент
f	— коэффициент трения скольжения
k	— коэффициент трения качения
m	— масса
v	— линейная скорость
a	— линейное ускорение
ω	— угловая скорость
ε	— угловое ускорение
U	— перемещение
A	— работа
N	— мощность
η	— коэффициент полезного действия
J	— момент инерции
$\bar{S}$	— импульс силы
L	— момент количества движения
T	— кинетическая энергия
σ	— нормальное напряжение
τ	— касательное напряжение
S	— площадь поперечного сечения
E	— модуль упругости первого рода
μ	— коэффициент Пуассона
G	— модуль упругости второго рода (модуль упругости при сдвиге)
W_p	— полярный момент сопротивления
s_x	— статический момент относительно оси x
n	— коэффициент запаса
R	— коэффициент асимметрии цикла
λ	— гибкость стержня
HRC	— обозначение твердости по Роквеллу (шкала С)
HB	— обозначение твердости по Бринеллю
HV	— обозначение твердости по Виккерсу
t	— шаг цепи
P	— шаг резьбы
i	— передаточное отношение
u	— передаточное число
z	— число зубьев
$\delta\%$	— относительное удлинение при разрыве образца

Введение

Механика — одна из древнейших наук. Она развивалась по мере накопления человечеством знаний об окружающем мире, своевременно отвечая на многочисленные запросы практики. В Древнем Египте при строительстве пирамид уже пользовались рычагами, наклонными плоскостями, блоками. Эмпирические знания помогли открыть законы механики. В древности не существовало деления науки по отраслям, поэтому механика, как и философия, естествознание, являлась составной частью учения о природе и обществе. И только в IV в. до н.э. начинается отделение частных наук от общего естествознания.

Основоположителем механики как науки считают Архимеда (ок. 287 — 212 гг. до н.э.); он получил точное решение задач о равновесии сил, приложенных к рычагу, об определении центра тяжести тел.

В эпоху Возрождения (XIV — XVI вв.) большой вклад в развитие механики сделал знаменитый итальянский художник, ученый и инженер Леонардо да Винчи (1452 — 1519). Он изучал трение, скольжение, движение падающего тела, впервые ввел понятие момента силы.

Благодаря великому открытию Николая Коперника (1473 — 1543) был совершен переворот в естествознании: на смену геоцентрической системе Птолемея пришла гелиоцентрическая система мира. На основании учения Коперника И. Кеплер (1571 — 1630) сформулировал три закона движения планет, которые впоследствии привели к открытию Ньютоном закона всемирного тяготения. Начало изучению основ динамики положили работы итальянца Галилео Галилея (1564 — 1642) и англичанина Исаака Ньютона (1643 — 1727).

В XVIII в. были сформулированы общие принципы классической механики. К этому же времени относятся исследования в области механики твердого тела, гидродинамики и небесной механики.

В России в 1725 г. по инициативе Петра I была образована Российская академия наук. Большое влияние на развитие механики оказали труды академика М. В. Ломоносова (1711 — 1765), а также знаменитого математика, астронома и физика, швейцарца по происхождению, Леонарда Эйлера (1707 — 1783), проработавшего в Российской академии наук более 30 лет. Среди его многочисленных работ в области математики, гидромеханики и небесной меха-

ники следует отметить исследования по механике твердого и упругого тела. Эйлер заложил основы только зарождающихся дисциплин — сопротивления материалов и теории упругости.

Наиболее крупными зарубежными учеными XVIII и XIX вв. в области механики являются Иоганн Бернулли, Даниил Бернулли, Д'Аламбер, Ж.Лагранж. В работах французских ученых Вариньона и Пуансо наряду с динамикой получила дальнейшее развитие и статика.

Огромное значение для дальнейшего развития механики имели работы отечественных ученых XIX и XX вв.: М.В.Остроградского, П.А.Чебышева, С.В.Ковалевской, А.М.Ляпунова, И.В.Мещерского, К.Э.Циолковского, А.Н.Крылова, Н.Е.Жуковского и др.

Современное развитие машиностроения требует решения специальных задач. Бурно развивается наука о прочности и деформируемости элементов сооружений и деталей машин — сопротивление материалов. В отличие от теоретической механики, предметом изучения которой является движение абсолютно твердого тела под воздействием приложенных к нему сил, в сопротивлении материалов рассматривают задачи, в которых наиболее существенными являются свойства деформируемых тел. В то же время вследствие общности основных положений сопротивление материалов может рассматриваться как раздел механики, который можно назвать механикой деформируемых тел.

В курсе «Детали машин» на базе теоретической механики и сопротивления материалов изучают особенности расчета и принципы конструирования отдельных элементов и простейших соединений машин.

В соответствии со стандартом «Техническая механика» включает в себя главы «Теоретическая механика», «Сопротивление материалов», «Детали и механизмы машин».

В главе 1 «Теоретическая механика» изложены основы статики, кинематики, динамики и приведены примеры решения задач.

В главе 2 «Основы сопротивления материалов» даются общие принципы расчета элементов конструкций; приводятся примеры расчетов бруса на растяжение (сжатие), срез и смятие, поперечный изгиб. В этой главе рассматриваются виды напряженных состояний, гипотезы прочности, совместное действие кручения и изгиба. Даются понятия об усталостной прочности, динамических нагрузках и пределе выносливости; рассматривается устойчивость при осевом сжатии стержня. Приводятся примеры раскрытия статической неопределимости стержневых систем.

В главе 3 «Детали и механизмы машин» рассматриваются основные соединения деталей машин, передачи и механизмы; даются рекомендации по использованию тех или иных передач; приводятся примеры расчетов.

В главе 4 «Изменение механических свойств материалов» изложен материал, способствующий углублению и расширению знаний, полученных студентами в курсе «Материаловедение».

В конце каждой главы приведены контрольные вопросы. Они помогут студентам проанализировать изложенный материал и проверить свои знания.

В данном учебнике изложен минимум общетехнических сведений, усвоив которые, молодой техник будет уверенней чувствовать себя на производстве и сможет принимать самостоятельные решения в процессе творческого труда или дальнейшей учебы.

Глава 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

Теоретическая механика — это наука, которая изучает механическое движение тел и устанавливает общие законы этого движения. Теоретическая механика подразделяется на статику, кинематику и динамику.

Статика — это раздел теоретической механики, в котором изучаются законы приведения и условия равновесия сил, действующих на материальные точки. Встречающиеся в природе материальные тела обладают способностью под действием приложенных сил в той или иной мере деформироваться, т. е. менять форму вследствие изменения взаимного расположения образующих их частиц. Однако у большинства твердых тел (изготовленных из металлов, дерева) в нормальных условиях эти деформации пренебрежимо малы. Учет их приобретает практическое значение только при рассмотрении вопроса прочности соответствующих конструкций, что является предметом изучения дисциплины «Сопротивление материалов». При рассмотрении же общих условий равновесия деформациями большинства твердых тел в первом приближении можно пренебречь. В связи с этим в механике вводится понятие «абсолютно твердое тело».

Абсолютно твердым телом называется тело, расстояние между любыми двумя точками которого всегда остается неизменным. На рис. 1.1 показано тело, у которого расстояние $AB = \text{const}$.

В статике мы будем рассматривать все тела как абсолютно твердые, в дальнейшем для краткости называя их твердыми телами или просто телами.

Другим основным понятием в статике является понятие силы. **Силой** называется векторная величина, представляющая собой меру механического воздействия одних тел на другие. Что же такое механическое воздействие?

Механическим воздействием называется такое взаимодействие материальных тел, в результате которого с течением времени происходит изменение взаимного положения этих тел в пространстве (механическое движение) или изменение взаимного положения частиц этих тел (деформация). Например, при штамповке деталей верхний штамп, падая, останавливается в результате взаимодействия с нижним штампом. Если же между ними положить заготовку, то в результате такого взаимодействия происходит деформация заготовки.

Итак, сила $\vec{F}$ как векторная величина имеет модуль F , точку приложения A и направление (линию действия силы) (рис. 1.2). Проекции вектора силы $\vec{F}$ на оси координат определяются следующим образом:

на ось Ox

$$F_x = F \cos \alpha;$$

на ось Oy

$$F_y = F \cos \beta.$$

Модуль вектора $\vec{F}$, т. е. значение силы, определяется по теореме Пифагора:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}.$$

Введем следующие определения.

Материальной точкой называется абсолютно твердое тело, размерами которого можно пренебречь, мысленно сосредоточив всю массу этого тела в точке. Например, движение спутника вокруг планеты можно рассматривать как движение материальной точки, так как размеры спутника ничтожно малы по сравнению с размерами планеты.

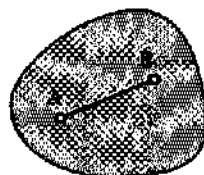


Рис. 1.1

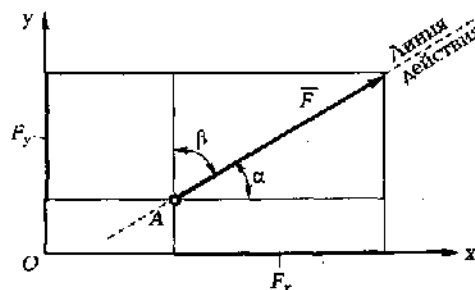


Рис. 1.2

Системой сил называется совокупность нескольких сил, действующих на данное тело.

Две системы называются **эквивалентными**, если, действуя на одно и то же твердое тело, они производят одинаковое механическое воздействие.

Силы, действующие на тело со стороны других материальных тел, называются **внешними силами**. Силы, действующие на части данного тела со стороны других частей этого же тела, называются **внутренними силами**.

Если под действием данной системы сил свободное тело находится в покое, то такая система сил называется **уравновешенной**, или **системой, эквивалентной нулю**.

Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется **равнодействующей** данной системы сил.

Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной точке, называется **сосредоточенной** силой. Силу, действующую на определенную часть поверхности тела, называют **распределенной**.

Все теоремы и уравнения статики базируются на нескольких исходных положениях, принимаемых без математических доказательств и называемых аксиомами. Аксиомы статики представляют собой результат знаний, накопленных человечеством, и отражают объективные процессы. Справедливость этих аксиом подтверждается многочисленными опытами и наблюдениями.

Аксиома 1. Две силы ($\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$), действующие на свободное абсолютно твердое тело, находятся в равновесии тогда и только тогда, когда они равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.3).

Аксиома 2. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

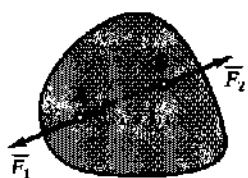


Рис. 1.3



Рис. 1.4

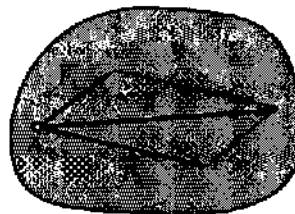


Рис. 1.5

Следствие из аксиом 1 и 2: точку приложения силы, действующей на абсолютно твердое тело, можно переносить вдоль ее линии действия в любую другую точку тела. Предположим, что в точке A к твердому телу приложена сила $\vec{F}$ (рис. 1.4). Приложим в точке B две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, равные по модулю силе $\vec{F}$ и направленные по ее линии действия в противоположные стороны. По аксиоме 2 можно отбросить уравновешенную систему сил $\vec{F}$ и $\vec{F}_2$. В результате на тело теперь действует сила $\vec{F}_1$, равная силе $\vec{F}$, но приложенная в точке B .

Аксиома 3. Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, являющуюся диагональю параллелограмма построенного на этих силах как на сторонах. Вектор $\vec{R}$ (рис. 1.5) представляет собой геометрическую сумму векторов $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Из аксиомы 3 следует, что равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, равна их геометрической сумме и приложена в той же точке.

Аксиома 4. Два материальных тела действуют друг на друга с силами, равными по величине и противоположно направленными. Такая система сил не является уравновешенной, так как силы приложены к разным телам.

Аксиома 5. Если деформируемое тело находится в равновесии под действием данной системы сил, то равновесие не нарушится, если тело станет абсолютно твердым.

Эта аксиома называется аксиомой затвердевания. Из аксиомы 5 следует, что это условие, являясь необходимым и для абсолютно твердого тела, и для деформируемого, не является для последнего достаточным. В главе 2 данного учебника будет рассматриваться достаточность равновесия деформируемых тел.

1.2. СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

Тело, которое может совершать любые перемещения в пространстве, называется **свободным**. Примерами свободного тела могут служить самолет или снаряд, летящие в воздухе. В различного рода сооружениях и конструкциях мы обычно встречаемся с телами, на перемещения которых наложены ограничения. Такие тела называются **несвободными**. Тело, ограничивающее свободу дви-

жения твердого тела, является по отношению к нему **связью**. Если приложенные к телу силы будут стремиться сдвинуть его в том или ином направлении, а связь препятствует такому перемещению, то тело будет воздействовать на связь с **силой давления на связь**. По аксиоме 4 связь будет действовать на тело с такой же силой, но противоположно направленной. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тому или иному перемещению, называется **силой реакции связи**.

Из изложенного следует **принцип освобождаемости** твердого тела от связи, или **аксиома связи**: всякое несвободное тело (рис. 1.6, а) можно рассматривать как свободное, если мысленно отбросить наложенные на тело связи и приложить вместо них силы реакции этих связей (рис. 1.6, б).

Силы, действующие на тела, будем разделять на заданные, или активные силы, и реакции связей, или пассивные силы.

Активные силы характеризуются тем, что модуль и направление каждой силы наперед известны и не зависят от действия других приложенных к данному телу сил. Примерами активных сил могут служить мускульная сила человека, сила тяжести, сила сжатой пружины.

Реакции связи на покоящееся тело возникают лишь в тех случаях, когда это тело под действием активных сил оказывает давление на связь, поэтому они и называются **пассивными силами**. По аксиоме связи реакция связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. Следовательно, если известно, в каком направлении связь препятствует перемещению твердого тела, то известно и направление реакции связи.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся типы связей.

1. **Гладкая поверхность или плоскость**. Гладкой будем называть такую поверхность, на которой в первом приближении можно пренебречь трением. Связь в виде гладкой поверхности не дает

телу перемещаться только в одном направлении — перпендикулярном к этой поверхности. Поэтому реакция гладкой поверхности $\vec{N}$ направлена по нормали к этой поверхности и приложена к телу в точке касания (см. рис. 1.6, б). На рис. 1.6, б тело изображено освобожденным от связи. В дальнейшем при рассмотрении равновесия несвободного тела реакцию связи будем изобра-

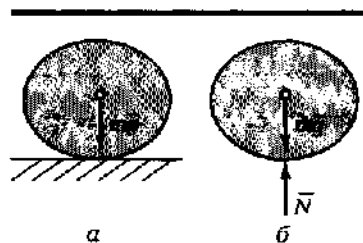


Рис. 1.6

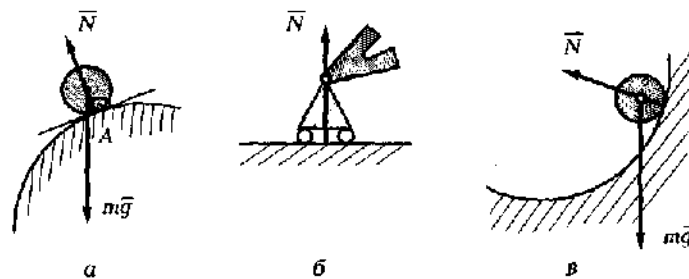


Рис. 1.7

жать так, как показано на рис. 1.7, не перерисовывая его. На этом рисунке показаны связи в виде гладких выпуклой (рис. 1.7, а) и вогнутой (рис. 1.7, в) поверхностей, а на рис. 1.7, б и 1.8, б, в — в виде плоской гладкой поверхности.

2. **Гладкая опора.** Связь, осуществленная в виде гладкой опоры, не дает телу перемещаться в направлении, перпендикулярном к поверхности тела в точке опоры (рис. 1.8). Видно, что реакция гладкой опоры направлена по нормали к опирающейся поверхности и приложена к телу в точках касания A , B , C и D .

3. **Нить.** Связь, осуществляемая в виде гибкой нити (рис. 1.9), не позволяет телу удалиться от точки привеса A , поэтому реакция связи T всегда направлена вдоль нити к точке ее закрепления.

4. **Цилиндрический шарнир.** На рис. 1.10 изображена шарнирно неподвижная опора вала, ось которого проходит через шарнир A перпендикулярно к плоскости чертежа. Цилиндрический шарнир A допускает вращение вала, но препятствует его перемещению в плоскости xOy , поэтому реакция цилиндрического шарнира R расположена в плоскости, перпендикулярной оси возможного враще-

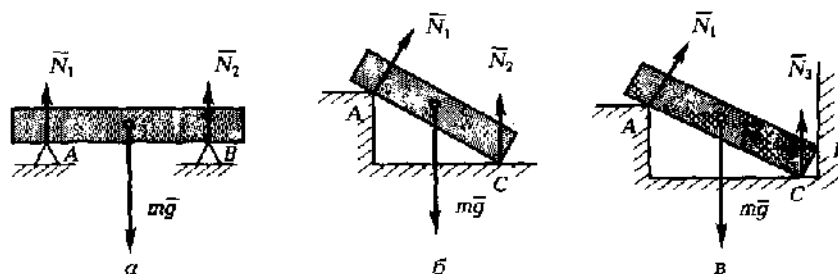


Рис. 1.8

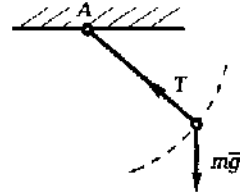


Рис. 1.9

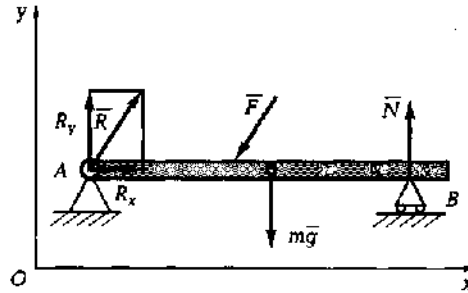
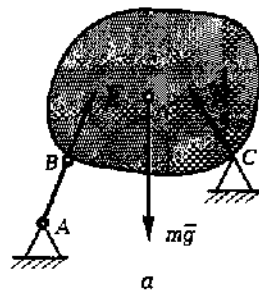


Рис. 1.10

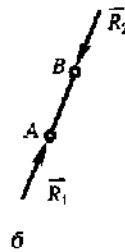
ния, и ее направление определяют две взаимно-перпендикулярные проекции на оси Ox и Oy .

5. **Невесомый стержень.** Жесткий невесомый (массой его пренебрегают) стержень, шарнирно прикрепленный к телу (рис. 1.11, а), испытывает действие только двух сил, приложенных в шарнирах A и B (рис. 1.11, б). Как и вся конструкция, стержень AB находится в равновесии. Если стержень находится в равновесии под действием двух сил, то в соответствии с аксиомой 1 статики эти силы должны быть равны по модулю, но противоположно направлены по одной линии действия, т.е. $\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$, а их модули $R_1 = R_2 = R$. В отличие от нити стержень может действовать на тело в двух направлениях, испытывая либо сжатие (см. рис. 1.11, б), либо растяжение.

6. **Жесткая заделка.** Заделка (рис. 1.12) исключает возможность любых перемещений вдоль осей Ox и Oy , а также поворот в плоскости xOy , поэтому такую связь заменяют реакцией $\vec{R}$ (или ее проекциями R_x и R_y) и моментом в заделке M_A .



а



б

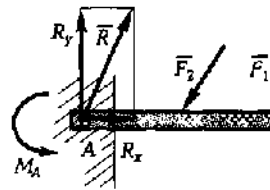


Рис. 1.12

Рис. 1.11

1.3. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости, называется **плоской**.

Плоскую систему могут образовывать произвольно расположенные силы, пары сил и силы, сходящиеся в одной точке. Рассмотрим равновесие системы сходящихся сил.

Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке (рис. 1.13, а). Существуют два способа сложения сходящихся сил: геометрический (рис. 1.13, б) и аналитический (рис. 1.13, в).

Геометрический способ сложения сходящихся сил. От произвольной точки O откладываем вектор, равный силе $\vec{F}_1$; от конца $\vec{F}_1$ откладываем вектор, равный силе $\vec{F}_2$, и т.д. (см. рис. 1.13, а, б). Затем, соединяя начало вектора $\vec{F}_1$ с концом последнего $\vec{F}_4$, получаем равнодействующую всех сил. Построенная фигура называется **силовым многоугольником**.

Аналитический способ сложения сходящихся сил. Проецируя векторное равенство $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{R}$ на оси координат (см. рис. 1.13, в), получим два алгебраических равенства:

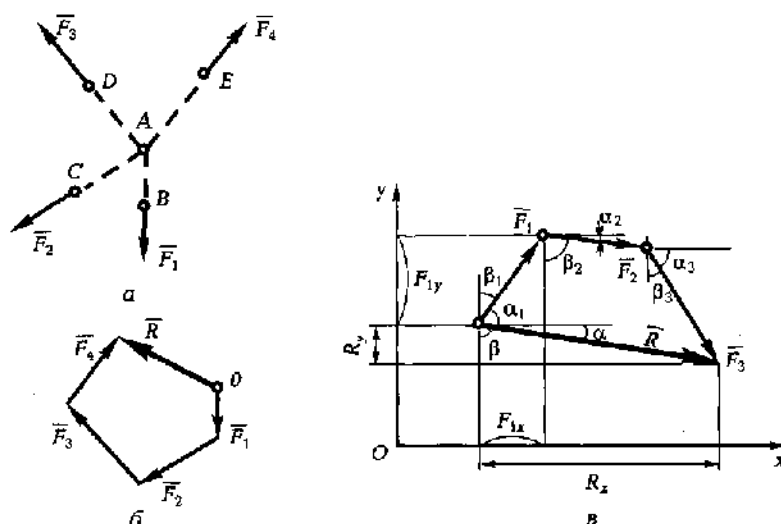


Рис. 1.13

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = R_x;$$

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = R_y,$$

или

$$F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 = R \cos \alpha;$$

$$F_1 \cos \beta_1 + F_2 \cos \beta_2 + F_3 \cos \beta_3 = -R \cos \beta.$$

Отсюда определим значение равнодействующей всех сходящихся сил

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

и направление вектора $\vec{R}$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}.$$

Условием равновесия системы сходящихся сил является равенство нулю модуля равнодействующей $\vec{R}$, т.е. силовой многоугольник должен быть замкнут (при геометрическом способе сложения) или проекции равнодействующей силы на оси координат должны быть равны нулю ($R_x = R_y = 0$) (при аналитическом способе). Отсюда для плоской системы сходящихся сил получим два уравнения равновесия

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0.$$

Следовательно,

для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из осей координат была равна нулю.

Пример 1.1

Определить натяжение нитей, удерживающих тело весом 5 Н в равновесии (рис. 1.14. а).

Решение.

При решении задач статики следует придерживаться определенной последовательности. В данном примере подробно изложен порядок решения задач такого типа.

1. Сделать схематический чертеж конструкции. Выбрать объект (узел, стержень или твердое тело), равновесие которого следует рассмотреть, причем искомые и заданные величины должны быть с ним связаны. В данной задаче исходные данные (вес, углы α и β) и искомые величины (натя-

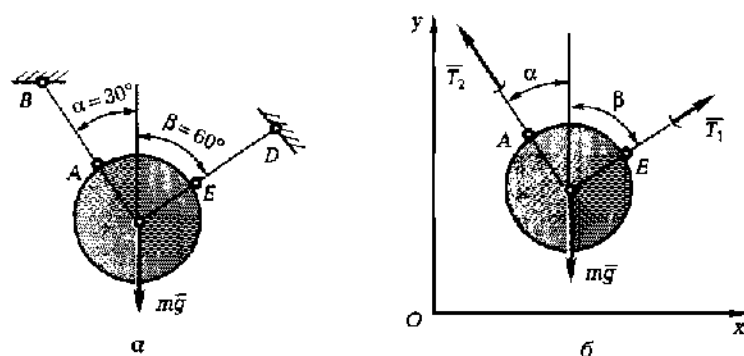


Рис. 1.14

жение нитей) связаны с телом весом 5 Н, т.е. оно является объектом равновесия.

2. Освободиться от связей и приложить к рассматриваемому объекту равновесия все активные и пассивные силы. К этому этапу решения задачи следует отнестись особенно внимательно. Уравнения равновесия, изучаемые в статике, приводятся только для свободных тел, поэтому следует хорошо обдумать, какие реакции связей при освобождении от последних нужно проставить на чертеже.

В данном случае связями являются нити AB и ED. При освобождении от связей заменяем их соответственно натяжениями нитей T_2 и T_1 (рис. 1.14, б).

3. Проанализировать полученную систему сил. Тело находится в равновесии под действием плоской системы сходящихся сил (линии их действия пересекаются в центре шара). Для такой системы сил можно записать два уравнения равновесия. Число неизвестных в этих уравнениях также равно двум, следовательно, задача статически определима.

4. Записать условия равновесия в векторной (графической) или аналитической форме. Найти неизвестные величины.

В данной задаче используем аналитический метод решения. Записываем уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 F_{ix} &= 0; \quad \sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0; \\ -T_2 \cos 60^\circ + T_1 \cos 30^\circ &= 0; \\ T_2 \cos 30^\circ + T_1 \cos 60^\circ - mg &= 0. \end{aligned}$$

Решив полученную систему уравнений, вычислим натяжение нитей:

$$\boxed{\text{Имеем: } T_1 = 2,5 \text{ Н; } T_2 = 4,33 \text{ Н.}}$$

Момент силы относительно точки

Сила, действующая на тело, может не только поступательно смещать его, но и поворачивать вокруг какой-нибудь точки. Пусть сила $\vec{F}$, приложенная в точке A , стремится повернуть тело вокруг точки O (рис. 1.15). Поскольку силу можно переносить по линии ее действия, то вращательный эффект этой силы не зависит от того, в какой точке эта сила приложена, а определяется расстоянием h от точки O до линии действия силы.

Моментом силы F относительно некоторого центра O называется величина, равная произведению силы на кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы и взятая с соответствующим знаком. Знак «+» соответствует моменту силы, которая стремится повернуть тело вокруг точки O против хода часовой стрелки, а знак «-» — если сила стремится повернуть тело по направлению движения часовой стрелки. Если линия действия силы проходит через точку, то момент силы относительно этой точки равен нулю.

Перпендикуляр, опущенный из точки O на линию действия силы $\vec{F}$, называется ее **плечом относительно центра O** .

Система двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил, приложенных к телу (рис. 1.16, а), называется **парой сил**.

Плечом пары h (см. рис. 1.16, а) называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил, составляющих пару. **Моментом пары сил** называется взятое со знаком «+» или «-» произведение модуля одной из сил на плечо пары.

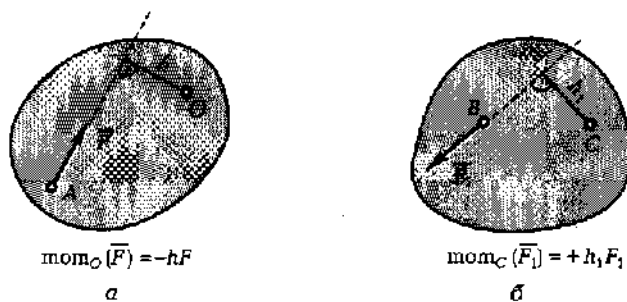


Рис. 1.15

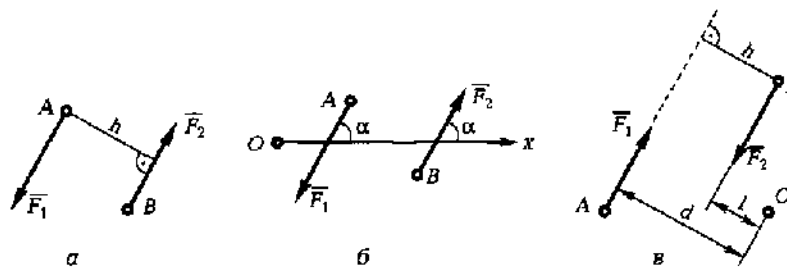


Рис. 1.16

Свойства пары сил. 1. Сумма проекций на любую ось сил, образующих пару, равняется нулю (рис. 1.16, б):

$$F_2 \cos \alpha - F_1 \cos \alpha = 0.$$

Следовательно, пару сил нельзя заменить равнодействующей.

Пример 1.2

Вычислить моменты пар сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (см. рис. 1.16, а и в), учитывая, что $F_1 = F_2 = F$.

Решение.

Момент пары сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, представленных на рис. 1.16, а:

$$\text{mom}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = +F_1 h = +Fh.$$

Момент пары сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, представленных на рис. 1.16, в:

$$\text{mom}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = -F_1 h = -Fh.$$

2. Сумма моментов сил, образующих пару, относительно любой точки плоскости, в которой расположена пара, равняется моменту пары (см. рис. 1.16, в):

$$\text{mom}_O(\vec{F}_1) = -F_1 d = -Fd;$$

$$\text{mom}_O(\vec{F}_2) = +F_2 l = +Fl;$$

$$\text{mom}_O(\vec{F}_1) + \text{mom}_O(\vec{F}_2) = -Fd + Fl = -(d - l)F = -Fh.$$

Приведение плоской системы сил к заданному центру

Пусть на твердое тело действует система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 1.17, а).

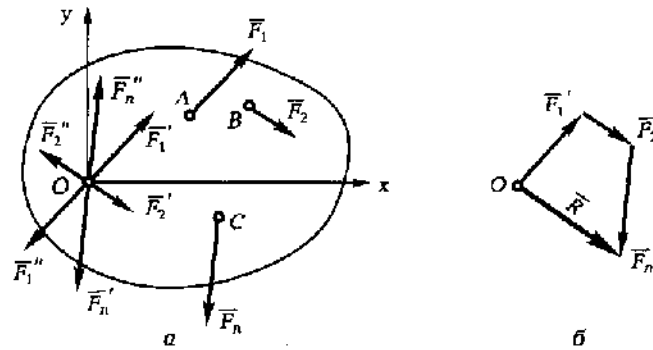


Рис. 1.17

Приложим в точке O по две уравновешенные силы, одна из которых будет равна и параллельна заданной: $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \dots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n$, а другая — равна, но направлена в противоположную сторону: $\vec{F}''_1 = -\vec{F}_1, \dots, \vec{F}''_n = -\vec{F}_n$.

Теперь на тело действуют система сходящихся сил $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$ и система пар сил с моментами $m_1 = \text{mom}(\vec{F}_1, \vec{F}''_1)$, $m_2 = \text{mom}(\vec{F}_2, \vec{F}''_2)$, ..., $m_n = \text{mom}(\vec{F}_n, \vec{F}''_n)$. Систему сходящихся сил заменяем равнодействующей (рис. 1.17, б): $\vec{R} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n$, или (что вытекает из равенства $\vec{F}_1 = \vec{F}'_1$ и т.д.) $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$. В соответствии со вторым свойством пары сил найдем алгебраическую сумму моментов всех пар:

$$M_O = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

Результат этих преобразований сформулирован в лемме Пуансо:

Произвольную плоскую систему сил можно заменить одной силой, равной геометрической сумме всех сил, приложенных в произвольно выбранном центре, и моментом, равным алгебраической сумме моментов присоединенных пар.

Полученная в результате приведения сила $\vec{R}$ называется **результатирующей силой** (она не является равнодействующей для заданной системы сил, так как не заменяет их действия), а M_O — **результатирующим моментом**.

Приняты следующие определения.

1. Точка O называется **центром приведения**.

2. Вектор $\vec{R}$, равный геометрической сумме всех сил, является **главным вектором**. Его значение не зависит от выбора центра приведения, т. е. $\vec{R}$ — инвариантная величина.

3. Момент M_O , равный алгебраической сумме моментов присоединенных пар, называется **главным моментом**; его значение зависит от выбора центра приведения.

Частные случаи приведения

1. $\bar{R} = 0, M_O \neq 0$ — система сил приводится к паре с моментом, равным алгебраической сумме моментов всех сил относительно центра приведения. В этом случае главный момент не зависит от центра приведения.

2. $R = 0, M_O \neq 0$ — система приводится к одной равнодействующей силе, приложенной в точке O ; главный вектор в этом случае является равнодействующей, так как он один заменяет совокупность действующих сил.

3. $\bar{R} = 0, M_O \neq 0$ — такая система сил может быть заменена одной равнодействующей силой, приложенной в новом центре приведения, расположенном от прежнего на расстоянии $d = M_O/R$.

4. $\bar{R} = 0, M_O = 0$ — плоская система сил находится в равновесии.

Аналитические условия равновесия плоской системы сил. Необходимыми и достаточными условиями равновесия являются $\bar{R} = 0$ и $M_O = 0$. Спроецировав вектор $\bar{R}$ на оси координат, получим

$$R_x = 0 \text{ и } R_y = 0, \text{ так как } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Зная, что $R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}$ и $R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}$, получим аналитические условия

равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n \text{mom}_O(\bar{F}_i) = 0.$$

Часто эти уравнения называют **основными уравнениями равновесия**. В зависимости от расположения сил иногда целесообразно составлять условия равновесия в виде двух уравнений моментов и одного уравнения проекций:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n \text{mom}_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n \text{mom}_B(\bar{F}_i) = 0.$$

В этом случае ось Ox не должна быть перпендикулярна AB .

Можно записать уравнения равновесия в виде трех уравнений моментов относительно трех точек A, B и C , не лежащих на одной прямой.

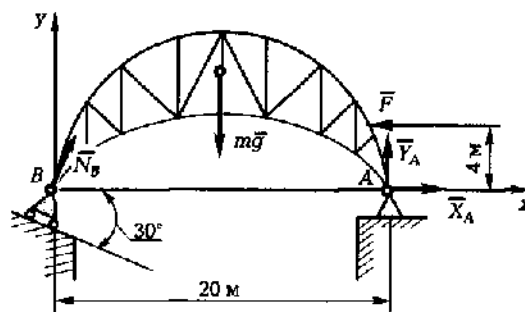


Рис. 1.18

$$\sum_{i=1}^n \text{mom}_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n \text{mom}_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n \text{mom}_C(\vec{F}_i) = 0.$$

Пример 1.3

На ферму весом 100 кН действует ветер с силой $F = 20$ кН. Определить реакции опор.

Решение.

1. За объект равновесия выбираем ферму.
2. Освобождаемся от связей и заменяем их действие реакциями (рис. 1.18).
3. В результате анализа полученной системы сил устанавливаем, что ферма находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил. Следовательно, существуют три уравнения равновесия. Сопоставив число неизвестных искомых величин N_B , X_A и Y_A с числом уравнений, делаем заключение, что система статически определимая.
4. Записываем уравнения равновесия для конкретной задачи:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 F_{ix} = 0; \quad N_B \cos 60^\circ + X_A - 20 &= 0; \\ \sum_{i=1}^5 F_{iy} = 0; \quad N_B \cos 30^\circ + Y_A - 100 &= 0; \\ \sum_{i=1}^5 \text{mom}_B(F_i) = 0; \quad -100 \cdot 10 + Y_A \cdot 20 + 20 \cdot 4 &= 0. \end{aligned}$$

5. Решая полученную систему уравнений, определяем:

$$Y_A = 46 \text{ кН}, \quad N_B = 62,4 \text{ кН}; \quad X_A = -11,2 \text{ кН}.$$

Отрицательное значение реакции X_A означает, что ее направление противоположно принятому на рисунке.

1.4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ТРЕНИЯ

Давно известно, что при движении одного тела по поверхности другого в плоскости соприкосновения возникает сила сопротивления относительному скольжению этих тел. Первым явления трения исследовал Леонардо да Винчи. Точное определение силы трения с учетом всех факторов, от которых она зависит, представляет столь сложную задачу, что до сих пор не удается найти ее полного теоретического решения. Поэтому при изучении законов трения приходится основываться на результатах экспериментов.

Итак, законы трения были найдены опытным путем и в 1771 г. сформулированы французским ученым Кулоном.

Законы трения

1. Сила трения $F_{\text{тр}}$ направлена в сторону, противоположную относительной скорости скольжения (рис. 1.19).
2. Сила трения не зависит от площади трущихся поверхностей.
3. Модуль силы трения пропорционален нормальному давлению.

Различают силу трения при покое и при движении:

$$F_{\text{тр}} \leq f_0 N \text{ — сила трения покоя;}$$

$$F_{\text{тр}} \leq f N \text{ — сила трения при движении,}$$

где N — сила нормального давления; f_0 — коэффициент трения покоя; f — коэффициент трения скольжения. Максимальное значение силы трения $F_{\text{тр max}} = f_0 N$.

Из экспериментов известно, что коэффициент трения скольжения зависит от скорости движения тел. Коэффициенты f_0 и f зависят от материала и физического состояния трущихся поверхностей (табл. 1.1).

Пример 1.4

На стальной вал диаметром $d = 0,4$ м (рис. 1.20, а) действует крутящий момент $M_{\text{кр}} = 500$ кН·м. Определить, с какой силой нужно сжать тормозные колодки, обтянутые кожей, чтобы остановить вал.

Решение.

1. За объект равновесия выбираем вал.
2. Освобождаемся от связей и заменяем их реакциями: нормальной силой $\vec{N}$ и силой трения

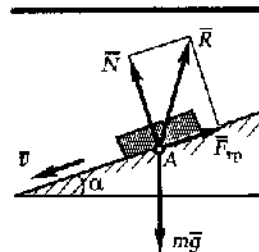


Рис. 1.19

Таблица 1.1. Значения коэффициентов трения покоя и скольжения для различных материалов

Материал	Коэффициент трения	
	покоя f_0	скольжения f
Камень по камню	0,6... 0,7	—
Бетон по галечнику	0,5... 0,6	—
Веревка по дереву	0,5... 0,8	0,5
Дерево по дереву	0,4... 0,7	0,3
Металл по дереву	0,4... 0,6	0,3... 0,5
Бетон по песку	0,3... 0,4	—
Камень по дереву	0,4	—
Кожа по металлу	0,3... 0,4	0,3
Асбестовая обкладка по стали (чугуну)	0,25... 0,35	—
Бронза по чугуну	0,16	—
Бронза по чугуну с обильной смазкой	0,12	—
Сталь по льду	0,03	0,015
Сталь по чугуну, сталь по стали, чугун по чугуну	0,12... 0,2	0,1

$\vec{F}_{\text{тр}}$, которые будут действовать на вал со стороны каждой колодки (рис. 1.20, б).

3. Поскольку число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия плоской системы сил, то считаем, что задача статически определима.

4. Запишем одно из уравнений равновесия, а именно:

$$\sum_{i=1}^n \text{mom}_O(F_i) = 0; M_{\text{кр}} - F_{\text{тр}}d = 0.$$

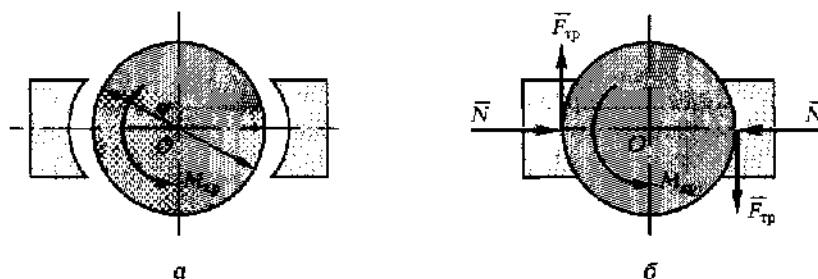


Рис. 1.20

Отсюда $F_{\text{тр}} = M_{\text{кр}}/\bar{d} = 500/0,4 = 1\,250$ кН.

5. Искомую силу $\bar{N}$ определяем из зависимости $F_{\text{тр}} = f_0 N$.

В табл. 1.1 для пары кожа—металл коэффициент трения покоя рекомендуется принимать $f_0 = 0,3 \dots 0,4$. Таким образом,

$$N = F_{\text{тр}}/0,3 = 1\,250/0,3 = 4\,166,6 \text{ кН.}$$

В зависимости от шероховатости поверхности значение силы трения может колебаться от нуля до максимального значения, т. е. $0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{тр max}}$. В этом случае реакция связи R будет изменяться в интервале $N \leq R \leq R_{\text{max}}$.

Наибольший угол φ , на который полная реакция R может отклоняться от нормали, называется **углом трения**:

$$\text{tg } \varphi = F_{\text{тр max}}/N = f_0 N/N = f_0.$$

В зависимости от направления приложенной к телу силы максимальная реакция связи R_{max} может иметь различные направления, образуя при этом геометрическое место в пространстве в виде конической поверхности с вершиной в точке касания тела, называемой **конусом трения**. Если приложенная к телу сила проходит внутри конуса трения, то тело находится в равновесии.

Трением качения, или трением второго рода, называют сопротивление, возникающее при качении одного тела по другому. Рассмотрим цилиндрический каток радиусом r и весом $m\bar{g}$, лежащий на шероховатой поверхности. Приложим в центре катка силу $\bar{Q}$ (рис. 1.21, а), которая будет меньше, чем $\bar{F}_{\text{тр max}}$: $\bar{Q} < \bar{F}_{\text{тр max}}$. Возникающая при этом сила трения $F_{\text{тр}}$ препятствует скольжению точки A по плоскости. В этом случае силы $m\bar{g}$ и $\bar{N}$ уравновешиваются, а $\bar{F}_{\text{тр}}$ и $\bar{Q}$ образуют пару сил, под действием которой каток должен катиться по плоскости.

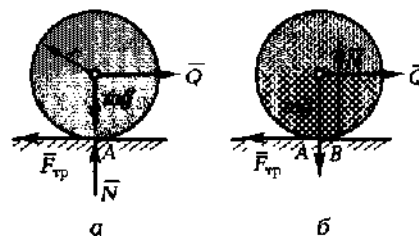


Рис. 1.21

Таблица 1.2. Значения коэффициента трения качения для различных материалов

Материал	Коэффициент трения качения k , см
Дерево по дереву	0,05...0,08
Дерево по стали	0,03...0,04
Чугун по чугуну	0,005
Мягкая сталь по мягкой стали	0,005
Закаленная сталь по закаленной стали	0,001

В действительности, если $Q < Q_{\text{пред}}$, каток остается в состоянии покоя. Для объяснения этого явления в рассуждения необходимо внести следующие коррективы (рис. 1.21, б):

$$Q_{\text{пред}} r = N \cdot AB = Nk.$$

Входящий в это выражение коэффициент k называется **коэффициентом трения качения**; он измеряется в сантиметрах (см). Следовательно, возникает момент силы трения качения

$$M_{\text{тр}} = kN.$$

Значения коэффициента трения качения приведены в табл. 1.2.

1.5. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

Пространственной будем называть систему сил, линии действия которых имеют любые направления в пространстве.

Вектором момента силы относительно некоторого центра называется векторное произведение радиуса-вектора точки приложения силы, проведенного из этого центра, на вектор силы (рис. 1.22). В соответствии с определением

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \overline{\text{мом}_O(\vec{F})}.$$

Из рис. 1.22 видно, что модуль вектора момента силы относительно центра O будет равен моменту силы относительно точки O , находящейся с этой силой в одной плоскости:

$$M_O = hF = rF \sin(\vec{r}, \vec{F}) = 2 \text{ площади } \triangle OAB.$$

Известно, что всякий вектор можно разложить по осям координат:

$$\vec{M}_O = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k};$$

так же можно разложить по осям координат радиус-вектор $\vec{r}$ точки приложения силы и силу $\vec{F}$:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \quad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}.$$

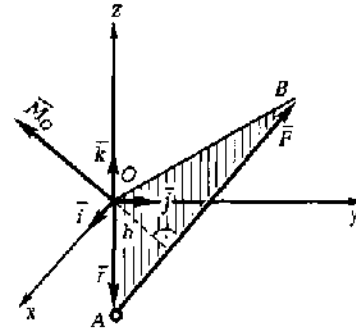


Рис. 1.22

Выполнив действие $\vec{r} \times \vec{F}$, получим

$$\vec{M}_O = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}.$$

Таким образом, проекции вектора момента силы на оси координат будут следующие:

$$M_x = yF_z - zF_y; \quad M_y = zF_x - xF_z; \quad M_z = xF_y - yF_x.$$

Направляющие косинусы вектора момента силы определяют его направление в пространстве:

$$\cos(\vec{M}_O, \vec{i}) = \frac{M_x}{M_O}; \quad \cos(\vec{M}_O, \vec{j}) = \frac{M_y}{M_O}; \quad \cos(\vec{M}_O, \vec{k}) = \frac{M_z}{M_O}.$$

Проекции вектора момента силы на ось численно равны моменту силы относительно оси:

$$\text{mom}_x(\vec{F}) = M_x = yF_z - zF_y;$$

$$\text{mom}_y(\vec{F}) = M_y = zF_x - xF_z;$$

$$\text{mom}_z(\vec{F}) = M_z = xF_y - yF_x;$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Первые три уравнения являются аналитическим выражением для определения моментов силы относительно осей координат.

Пример 1.5

Определить моменты сил $\vec{Q}$, $\vec{T}$ и $\vec{P}$ относительно осей координат, если известны точки приложения этих сил (рис. 1.23).

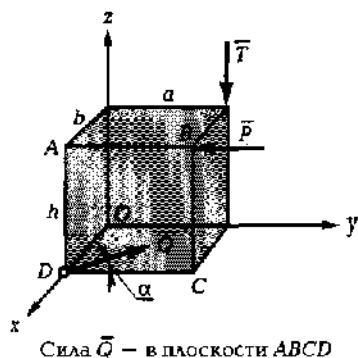


Рис. 1.23

Решение.

1. Определяем моменты силы $\bar{T}$ относительно осей координат:

$$\text{mom}_x(\bar{T}) = -Ta;$$

$$\text{mom}_y(\bar{T}) = 0 \text{ (так как сила } \bar{T} \text{ пересекает ось } Oy);$$

$$\text{mom}_z(\bar{T}) = 0 \text{ (так как сила } \bar{T} \text{ параллельна оси } Oz).$$

2. Определяем моменты силы $\bar{P}$ относительно осей координат:

$$\text{mom}_x(\bar{P}) = +Ph;$$

$$\text{mom}_y(\bar{P}) = 0 \text{ (так как сила } \bar{P} \text{ параллельна оси } Oy);$$

$$\text{mom}_z(\bar{P}) = -Pb.$$

3. Вычисляем моменты силы $\bar{Q}$ относительно осей координат:

$$\text{mom}_x(\bar{Q}) = 0 \text{ (так как сила пересекает ось } Ox);$$

$$\text{mom}_y(\bar{Q}) = -(Q \sin \alpha) b;$$

$$\text{mom}_z(\bar{Q}) = +(Q \cos \alpha) b.$$

Теорема о приведении пространственной системы сил к заданному центру. Всякая пространственная система сил, действующих на абсолютно твердое тело, может быть заменена одной силой, геометрически равной сумме всех действующих сил, приложенных в произвольно выбранном центре, и вектором-моментом, равным геометрической сумме моментов всех сил относительно центра приведения (рис. 1.24).

Доказательство. Пусть на твердое тело действует система сил, произвольно расположенных в пространстве. За центр приведения выбираем произвольную точку O . Приложим в этой точке уравновешенную систему сил $\bar{F}'_1 = -\bar{F}''_1$, $\bar{F}'_2 = -\bar{F}''_2$ и т. д., причем $\bar{F}'_1 = \bar{F}_1, \dots, \bar{F}'_n = \bar{F}_n$. Заменяем сходящуюся систему сил $\bar{F}'_i$ равнодействующей $\bar{R} = \bar{F}'_1 + \bar{F}'_2 + \dots + \bar{F}'_n$. Затем вычислим моменты всех оставшихся сил относительно центра приведения O . Моменты сил $\bar{F}''_1, \bar{F}''_2, \dots, \bar{F}''_n$ относительно центра O равны нулю, так как их плечо равно нулю. Векторы-моменты заданных сил относительно центра приведения будут равны:

$$\overline{\text{mom}}_O(\bar{F}_1) = \bar{m}_1;$$

$$\overline{\text{mom}}_O(\bar{F}_2) = \bar{m}_2;$$

.....

$$\overline{\text{mom}}_O(\bar{F}_n) = \bar{m}_n.$$

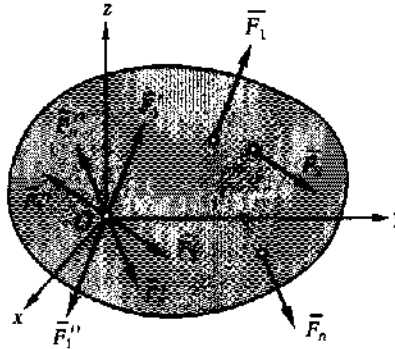


Рис. 1.24

Найдем геометрическую сумму этих векторов и получим главный вектор-момент:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{\text{мом}_O(\vec{F}_i)} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_i.$$

Таким образом, на твердое тело теперь действует одна сила $\vec{R}$ и один момент $\vec{M}_O$, т. е. система пространственных, произвольно расположенных сил сведена к одной результирующей силе $\vec{R}$ и одному результирующему моменту $\vec{M}_O$. Теорема доказана.

Аналитическое выражение для определения главного вектора и главного момента. Главный вектор $\vec{R}$ и главный момент $\vec{M}_O$ были найдены геометрическим путем (построением векторных многоугольников). Для пространственной системы сил их проще определять аналитически. Принимаем центр приведения за начало координат. Тогда, проецируя на оси координат векторные равенства, получаем

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz};$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_{ix}; \quad M_y = \sum_{i=1}^n m_{iy}; \quad M_z = \sum_{i=1}^n m_{iz}.$$

Частные случаи приведения

Любая произвольная пространственная система сил может быть замещена главным вектором и главным моментом. Рассмотрим возможные частные случаи.

1. $\bar{R} = 0; \bar{M}_O = 0$ — случай равновесия.
2. $\bar{R} = 0; \bar{M}_O \neq 0$ — система сил приводится к паре (твердое тело вращается).
3. $\bar{R} \neq 0; \bar{M}_O = 0$ — система сил приводится к равнодействующей, которая проходит через центр приведения (точку O).
4. $\bar{R} \neq 0; \bar{M}_O \neq 0$ — результирующая сила и результирующая пара сил лежат в одной плоскости, т.е. $\bar{R} \perp \bar{M}_O$. Это частный случай плоской системы сил. Ранее было показано, что такой случай может иметь равнодействующую, приложенную не в центре приведения, а в другой точке, отстоящей от него на расстоянии, равном M_O/R . Таким образом, пространственная система сил заменена одной равнодействующей, не проходящей через центр приведения.
5. $\bar{R} \neq 0; \bar{M}_O \neq 0$ и $\bar{R} \nparallel \bar{M}_O$ — система сводится к динамическому винту.

Аналитические условия равновесия пространственной системы сил. Необходимыми и достаточными условиями равновесия произвольной пространственной системы сил является равенство нулю главного вектора и главного момента:

$$\bar{R} = 0; \bar{M}_O = 0.$$

Поскольку $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0$, то R_x , R_y и R_z должны быть равны нулю. Аналогичное рассуждение справедливо и для вектора главного момента. Следовательно, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0; & \sum_{i=1}^n F_{iy} &= 0; & \sum_{i=1}^n F_{iz} &= 0; \\ \sum_{i=1}^n \text{mom}_x(\bar{F}_i) &= 0; & \sum_{i=1}^n \text{mom}_y(\bar{F}_i) &= 0; & \sum_{i=1}^n \text{mom}_z(\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned}$$

Пример 1.6

Определить, какой груз сможет поднять человек, прикладывая усилие к веревке $P = 60 \text{ Н}$ (рис. 1.25); определить также реакции опор.

Решение.

1. За объект равновесия выбираем вал AB .
2. Освобождаем вал от связей и заменяем их действие реакциями. Опоры O и B представляют собой цилиндрические шарниры, которые препятствуют перемещению только в радиальном направлении, поэтому в точках A и B прикладываем в радиальных направлениях реакции X_O , Z_O , X_B и Z_B . Веревку «обрываем» чуть выше ролика C и заменяем натяжением нити T .

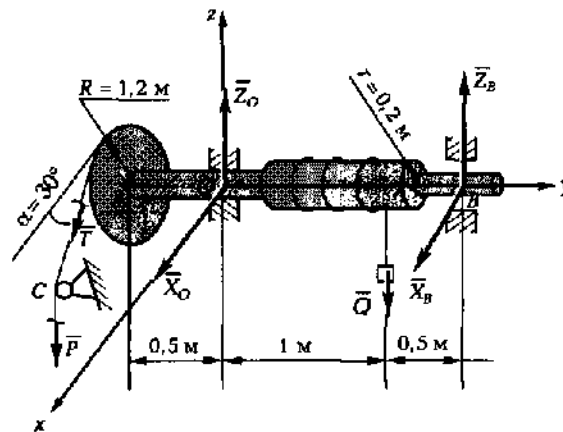


Рис. 1.25

3. Теперь можно рассматривать равновесие свободного тела под действием активных и пассивных сил. Из шести уравнений равновесия произвольной системы пространственных сил остается только пять, так как сумма проекций сил на ось Oy тождественно равна нулю. Задача представляется статически определимой, так как неизвестных величин тоже пять: X_O , X_B , Q , Z_O и Z_B .

4. Составляем уравнения равновесия пространственной системы сил:

$$\begin{aligned} F_x &= X_O + X_B + T \cos 30^\circ = 0; \\ F_y &= 0; \\ F_z &= -Q + Z_O + Z_B + T \cos 30^\circ = 0; \\ M_x &= +Z_B \cdot 1,5 - Q \cdot 1 + T \cos 60^\circ \cdot 0,5 = 0; \\ M_y &= -Qr + TR = 0; \\ M_z &= -X_B \cdot 1,5 + T \cos 30^\circ \cdot 0,5 = 0. \end{aligned}$$

5. Подставив в предпоследнее уравнение $r = 0,2$ м, $R = 1,2$ м и $T = 60$ Н, получим, что вес груза $Q = 360$ Н.

Из последнего уравнения определим реакцию X_B :

$$X_B = \frac{60 \cos 30^\circ \cdot 0,5}{1,5} = 17 \text{ Н.}$$

Подставляя полученные значения $Q = 360$ Н, $X_B = 17$ Н в оставшиеся уравнения, найдем Z_B , Z_O и X_O :

$$\begin{aligned} Z_B &= \frac{360 \cdot 1 - 60 \cdot 0,5 \cdot 0,5}{1,5} = 230 \text{ Н}; \\ Z_O &= 360 - 230 + 60 \cdot 0,5 = 160 \text{ Н}; \\ X_O &= -(17 + 60 \cdot 0,85) = -68 \text{ Н.} \end{aligned}$$

Отрицательный знак реакции X_O означает, что она направлена в противоположную указанной на рисунке сторону.

1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ

Центр тяжести твердого тела

Силы притяжения отдельных частиц тела направлены к центру Земли. Так как размеры рассматриваемых тел малы по сравнению с радиусом Земли, то эти силы можно считать параллельными. Равнодействующая этих параллельных сил, равная их сумме, есть вес тела, а центр этой системы параллельных сил, в котором приложен вес тела, называется **центром тяжести тела**. Чтобы найти положение центра тяжести тела, необходимо изучить, как складываются параллельные силы и определяются координаты точки приложения их равнодействующей.

Сложение параллельных сил

Допустим, что на тело действует система параллельных сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ (рис. 1.26), причем $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ действуют в одну сторону, а $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ — в противоположную. Для сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ найдем такой центр приведения, относительно которого результирующий момент будет равен нулю:

$$\sum_{i=1}^2 \text{mom}_{B_1}(\vec{F}_i) = F_2 \cdot A_2 B_1 - F_1 \cdot A_1 B_1 = 0.$$

Отсюда $A_2 B_1 / A_1 B_1 = F_1 / F_2$. Модуль результирующей силы, приложенной в точке B_1 , будет равен $R_1 = F_1 + F_2$.

Аналогично найдем R_2 и ее точку приложения B_2 .

Приведем силы $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ к центру приведения C , положение которого определится из соотношения $B_2 C / B_1 C = R_1 / R_2$.

Результирующая сил $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ будет равна их геометрической сумме, т. е. $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$.

Поскольку векторы сил $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ параллельны и противоположно направлены, то модуль $\vec{R}$ будет равен $R = R_2 - R_1$.

Если $\vec{R} \neq 0$ то всегда можно найти такую точку, в которой будет приложена равнодействующая $\vec{R}$ всех параллельных сил. Эта точка называется **центром параллельных сил**.

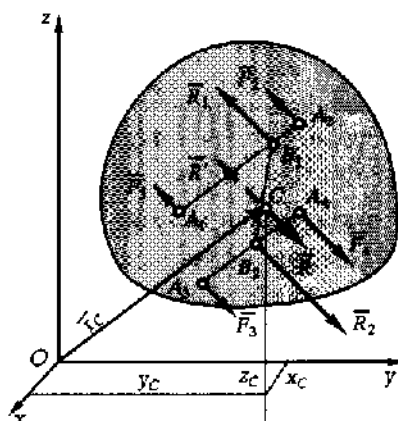


Рис. 1.26

Координаты центра параллельных сил. Положение центра параллельных сил относительно начала координат определяется радиусом-вектором $\vec{r}$ или его проекциями на оси координат, что равнозначно координатам центра параллельных сил x_C , y_C и z_C .

Теорема о моменте равнодействующей (теорема Вариньона). Приложим в точке C силу $\vec{R}' = -\vec{R}$ (см. рис. 1.26). Тогда система будет находиться в равновесии. Теперь определим момент всех сил относительно точки O . Очевидно, он равен нулю, так как система сил находится в равновесии:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \overline{\text{mom}}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \overline{\text{mom}}_O(\vec{F}_i) + \overline{\text{mom}}_O(\vec{R}') = 0.$$

Но так как $\vec{R}' = -\vec{R}$, то

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \vec{r}_C \times \vec{R} = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \vec{r}_C \times \vec{R}.$$

Правая часть равенства представляет собой выражение для момента равнодействующей, а левая часть — это геометрическая

сумма моментов всех сил относительно той же точки. Отсюда следует, что

момент равнодействующей относительно любого центра равен геометрической сумме векторов-моментов слагаемых сил относительно того же центра.

Эта теорема о моменте равнодействующей называется теоремой Вариньона.

Спроецировав векторное равенство $\vec{r}_C \times \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ на оси координат, получим формулы для определения моментов равнодействующей относительно осей координат:

$$\begin{aligned} \text{mom}_x(\vec{R}) &= \sum_{i=1}^n \text{mom}_x(\vec{F}_i); \\ \text{mom}_y(\vec{R}) &= \sum_{i=1}^n \text{mom}_y(\vec{F}_i); \\ \text{mom}_z(\vec{R}) &= \sum_{i=1}^n \text{mom}_z(\vec{F}_i). \end{aligned}$$

Величина равнодействующей параллельных сил не изменится, если все силы повернуть параллельно оси Oz . В этом случае момент равнодействующей относительно оси Oy

$$Rx_C = \sum_{i=1}^n F_i x_i, \text{ откуда } x_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{R} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}.$$

Аналогичным образом вычислим и другие координаты центра параллельных сил:

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{R} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{R} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

Координаты центра тяжести твердого тела. Если в формулах для определения координат центра параллельных сил вместо F_{ix} , F_{iy} , F_{iz} и R подставить $m_i g_x$, $m_i g_y$, $m_i g_z$ и mg , то получим зависимости для определения координат центра тяжести тела:

$$x_c = \frac{\sum m_i g_x x_i}{mg} = \frac{\sum V_i x_i}{V}; \quad y_c = \frac{\sum m_i g_x y_i}{mg} = \frac{\sum V_i y_i}{V};$$

$$z_c = \frac{\sum m_i g_x z_i}{mg} = \frac{\sum V_i z_i}{V},$$

где m_i , V_i — соответственно масса и объем каждой частицы твердого тела; m , V — соответственно полная масса и объем однородного тела.

Для плоской фигуры площадью S , имеющей постоянную толщину h , элементарные объемы V_i можно выразить через элементарные площади S_i :

$$V_i = hS_i.$$

Тогда координаты центра тяжести этой фигуры определятся следующим образом:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S}; \quad y_c = \frac{\sum S_i y_i}{S}; \quad z_c = \frac{\sum S_i z_i}{S}.$$

Существует также понятие «центр масс», справедливое для любого силового поля; координаты центра масс вычисляют по формулам

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{m}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{m}.$$

Таким образом, центр тяжести (или центр масс) — это геометрическая точка C , которая в частных случаях может лежать вне пределов самого тела; например, центр тяжести кольца лежит на пересечении его осей симметрии, т. е. вне тела.

Пример 1.7

Найти координаты центра тяжести однородной пластины, изображенной на рис. 1.27, а. Толщина пластины постоянная.

Решение.

1. Поскольку однородная пластина имеет постоянную толщину, то можно воспользоваться формулами для определения положения центра тяжести плоской фигуры.

2. Разбиваем пластину на три простейшие геометрические фигуры (рис. 1.27, б), координаты центров тяжести которых известны.

3. Выбираем систему координат, как указано на чертеже.

4. Заносим в табл. 1.3 результаты вычислений; каждому прямоугольнику соответствует строка таблицы.

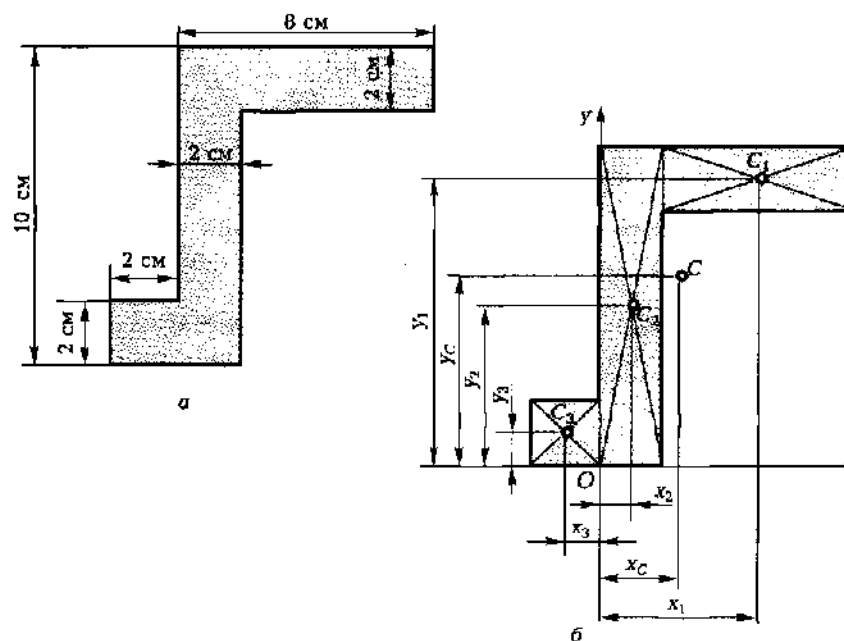


Рис. 1.27

5. Суммируем значения S_i , $S_i x_i$, $S_i y_i$ и записываем результаты в нижней строке.

6. Вычисляем координаты центра тяжести пластины:

$$x_C = \frac{\sum S_i x_i}{S} = \frac{76}{36} = 2\frac{1}{9} \text{ см}; \quad y_C = \frac{\sum S_i y_i}{S} = \frac{112}{36} = 3\frac{8}{9} \text{ см}.$$

7. По вычисленным координатам строим центр тяжести C пластины.

Таблица 1.3

Номер элемента	S_i , см	x_i , см	y_i , см	$S_i x_i$, см ²	$S_i y_i$, см ²
1	12	5	9	60	108
2	20	1	5	20	100
3	4	-1	1	-4	4
Σ	36	—	—	76	212

Способы определения положения центров тяжести

Способ разбиения на фигуры, положение центров тяжести которых известно, применяется в случаях, когда тело можно разбить на конечное число простых элементов.

Способ дополнения является частным случаем способа разбиения. Применяется, когда тело можно разбить на простейшие фигуры, положения центров тяжести которых известны, но некоторые из геометрических фигур представляют собой пустоты.

Пример 1.8

Найти положение центра тяжести поперечного сечения вала диаметром 12 см, в котором высверлено отверстие диаметром 2 см (рис. 1.28).

Решение.

1. Поскольку нужно найти центр тяжести поперечного сечения, то воспользуемся формулами для определения центра тяжести плоской фигуры.

2. Дополняем площадь поперечного сечения площадью высверленного отверстия (так как в действительности этот элемент отсутствует, в формуле площадь отверстия берется с отрицательным знаком):

$$S_2 = -\pi r^2 = -\pi \cdot 1^2 = -\pi \text{ см}^2.$$

3. Начало системы координат расположим в центре окружности радиуса R , т.е. в точке C_1 .

4. Заполняем табл. 1.4.

5. Суммируем S_i и S_ix_i , после чего записываем результаты в нижней строке.

6. Вычисляем координаты центра тяжести поперечного сечения:

$$x_C = \frac{\sum S_i x_i}{S} = \frac{-3\pi}{35\pi} = -\frac{3}{35} \text{ см},$$

а $y_C = 0$, так как ось C_1x является осью симметрии этого сечения.

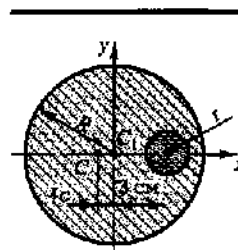


Рис. 1.28

Таблица 1.4

Номер элемента	S_i , см	x_{ci} , см	y_{ci} , см	S_ix_i , см ³	S_iy_i , см ³
1	36π	0	0	0	0
2	$-\pi$	3	0	-3π	0
Σ	35π	—	—	-3π	0

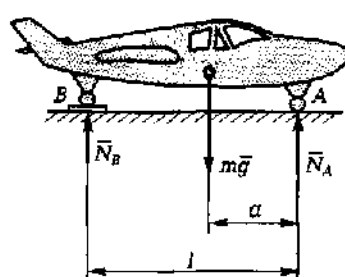


Рис. 1.29

7. По вычисленным координатам поперечного сечения строим его центр тяжести C .

Способ интегрирования применяется в случаях, когда для определения положения центра тяжести не могут быть применены первые два способа.

Экспериментальный способ осуществляется двумя методами — подвешивания и взвешивания.

Метод подвешивания заключается в том, что плоское тело, которое нельзя разбить на простейшие фигуры с известным положением центров тяжести, подвешивают на нити. Вдоль этой нити на плоскости тела прочерчивают линию. Затем эту плоскую фигуру подвешивают за другую точку, после чего вновь проводят вертикальную линию (вдоль линии подвеса). В точке пересечения этих двух линий и находится центр тяжести.

Метод взвешивания обычно применяется для крупных изделий: самолетов, вертолетов и других машин. Если известна масса, например, самолета, то на весы ставят задние колеса (рис. 1.29) и по показанию весов определяют реакцию N_B . Затем записывают одно из уравнений равновесия; удобнее пользоваться уравнением суммы моментов относительно точки A :

$$\sum_{i=1}^3 \text{mom}_A(\vec{F}_i) = 0; \quad mga - N_B l = 0.$$

Отсюда находят искомую величину a , т. е. положение центра тяжести самолета:

$$a = \frac{N_B l}{mg}.$$

1.7. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения вне связи с силами, вызывающими это движение.

В теоретической механике изучается простейшая форма движения — **механическое движение**. Механическое движение всегда рассматривается относительно выбранной системы отсчета, которая может быть подвижной или условно неподвижной. Например, при рассмотрении механического движения тел, находящихся на Земле, за **неподвижную систему осей координат** выбирают систему осей, неизменно связанных с Землей.

Способы задания движения материальной точки

Точка движется в пространстве по некоторой линии, или траектории.

Движение точки задано **естественным способом** (рис. 1.30, а), если известны: 1) траектория точки; 2) зависимость изменения длины дуги от времени: $\overline{OM} = S = f(t)$ (эта зависимость называется **уравнением движения материальной точки**); 3) начало движения; 4) начало отсчета; 5) направление отсчета.

Положение точки в пространстве однозначно определяется радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным из некоторого неподвижного центра в данную точку M (рис. 1.30, б). Такой способ задания движения называется **векторным**:

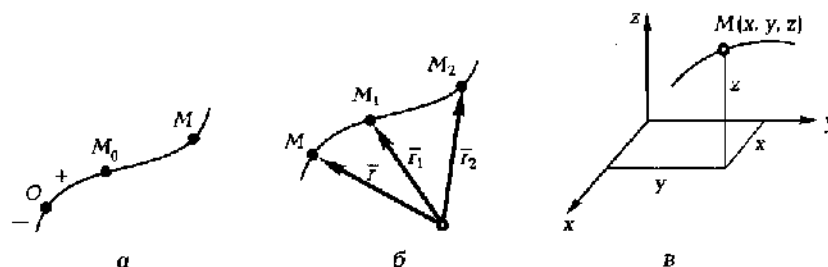


Рис. 1.30

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Положение точки в пространстве в этом случае будет определяться геометрическим местом концов векторов $\vec{r}$, т.е. годографом ее радиуса-вектора.

При **координатном способе** задания движения (рис. 1.30, в) должны быть известны зависимости, по которым можно определить, как со временем изменяются координаты точки в пространстве:

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t).$$

Эти уравнения называются **уравнениями движения точки в декартовых координатах**, с их помощью для каждого момента времени можно определить положение точки в пространстве. Если точка **движется на плоскости**, то ее положение описывается двумя уравнениями:

$$x = f_1(t); y = f_2(t);$$

если точка **движется по прямой**, то достаточно только одного уравнения:

$$x = f(t).$$

Пример 1.9

Движение точки в плоскости задано уравнениями

$$x = 2 + 4t; y = -3 + 8t,$$

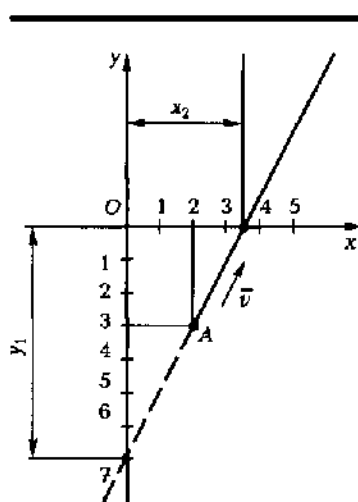


Рис. 1.31

где x и y измеряются в сантиметрах (см), а t — в секундах (с). Определить траекторию движущейся точки.

Решение.

Получим уравнение траектории, исключив время t из заданных уравнений движения. Из первого уравнения $t = (x - 2)/4$, из второго $t = (y + 3)/8$. Приравняв правые части этих равенств, получим

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y + 3}{8}, \text{ или } 2x - y = 7.$$

Траектория движения — прямая линия, построим ее. Полагая $x = 0$, найдем точку пересечения линии траектории с осью Oy : $y_1 = -7$.

Полагая $y = 0$, найдем точку пересечения траектории с осью Ox : $x_2 = 3,5$ см. Проведя через эти точки прямую, полу-

чим линейную траекторию движения материальной точки (рис. 1.31). На этой линии необходимо пайти начало движения точки.

В момент начала движения, т.е. когда $t = 0$, точка имела координаты $x_A = 2 + 4 \cdot 0 = 2$ см и $y_A = -3 + 8 \cdot 0 = -3$ см. Остается определить, в каком направлении от точки А движется материальная точка. С течением времени координаты x и y будут возрастать. Следовательно, материальная точка начнет движение из точки А и далее будет двигаться вверх по стрелке до бесконечности.

Итак, траектория движения материальной точки найдена: она задана естественным способом: ее начало — в точке А, направление движения — по стрелке.

Скорость точки характеризует быстроту и направление движения точки. При векторном способе задания движения положение точки в каждый момент времени определяется радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Пусть в момент времени t точка занимает положение М, определяемое радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (рис. 1.32, а). В момент времени $t + \Delta t$ точка займет положение M_1 , определяемое радиусом-вектором $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r}$. Отношение $\Delta \vec{r} / \Delta t$ является вектором средней скорости, а производная вектора $\vec{r}$ по времени t и будет вектором скорости в данный момент времени:

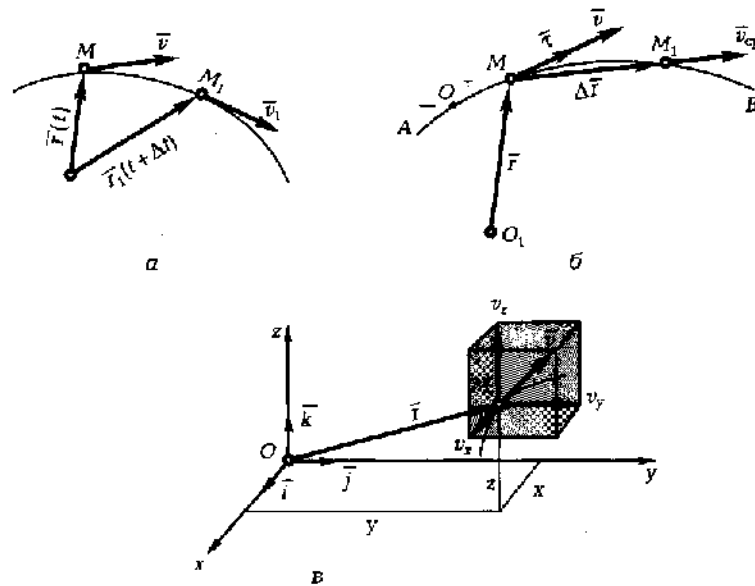


Рис. 1.32

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Поскольку $\vec{v}$ — это производная функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то вектор скорости $\vec{v}$ всегда направлен по касательной к траектории движения материальной точки.

Если движение точки задано естественным способом, то известны ее траектория AB , начало движения, направление и уравнение движения $S = S(t)$. В полученное выражение $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ введем промежуточную переменную — дуговую координату S :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dS} \frac{dS}{dt}.$$

Поскольку dS — величина скалярная, то вектор $d\vec{r}/dS$ будет направлен по касательной к траектории в точке M ; этот вектор обозначается $\vec{\tau}$ (рис. 1.32, б) и является ортом направления, модуль его равен единице. Орт $\vec{\tau}$ всегда направлен в сторону возрастания S .

Таким образом, при естественном способе задания траектории вектор скорости

$$\vec{v} = \frac{dS}{dt} \vec{\tau}.$$

Производная dS/dt представляет собой алгебраическое значение скорости. Если $dS/dt > 0$, то в рассматриваемый момент времени точка движется в сторону увеличения дуговой координаты S , и, следовательно, направление ее скорости совпадает с направлением орта $\vec{\tau}$. Если же $dS/dt < 0$, то функция S убывает, и, следовательно, вектор скорости направлен в сторону, противоположную вектору $\vec{\tau}$.

Определим скорость точки при координатном способе задания движения. Пусть заданы уравнения движения точки M (рис. 1.32, в):

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t).$$

Ее положение в пространстве определяется радиусом-вектором

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z.$$

На основании предыдущих выводов вектор скорости можно записать следующим образом:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt}.$$

Следовательно, $\vec{v} = \bar{i}v_x + \bar{j}v_y + \bar{k}v_z$.

Построим параллелепипед на проекциях v_x , v_y и v_z (см. рис. 1.32, в) и определим модуль вектора скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Ускорение точки — векторная величина, характеризующая быстроту изменения с течением времени вектора скорости: $\vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$. Запишем выражения для проекций вектора ускорения на оси координат $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$, $a_z = dv_z/dt$. Если известны проекции a_x , a_y и a_z , то можно определить модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

При естественном способе задания траектории движения материальной точки ее вектор ускорения можно разложить по естественным осям координат $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$ (рис. 1.33):

$$\vec{a} = a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n}.$$

Проекция ускорения на орт $\bar{\tau}$ называется **касательным ускорением**, которое характеризует быстроту изменения модуля скорости: $a_\tau = dv/dt$. Касательное ускорение существует только при неравномерном криволинейном движении.

Нормальное ускорение $a_n = v^2/\rho$ показывает изменение направления вектора скорости $\vec{v}$, когда материальная точка движется по криволинейной траектории (ρ — радиус кривизны траектории в точке).

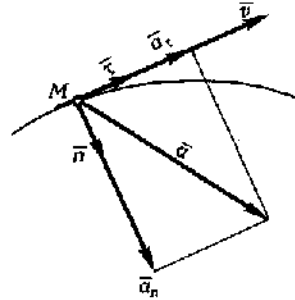


Рис. 1.33

Частные случаи движения материальной точки

1. $a_n = 0$; $a_\tau = 0$. Следовательно, полное ускорение $a = 0$. Точка движется равномерно прямолинейно. Закон движения в этом случае $S = S_0 + v_0 t$, где S_0 — дуговая координата в начальный момент времени; v_0 — скорость движения точки в начальный момент движения (скорость не изменится и в любой другой момент времени t , так как движение неускоренное).

2. $a_n \neq 0$; $a_t = 0$ — равномерное криволинейное движение. Вектор скорости материальной точки изменяется лишь по направлению. Закон движения по криволинейной траектории запишется аналогично первому случаю:

$$S = S_0 + v_0 t.$$

3. $a_n = 0$; $a_t \neq 0$ — прямолинейное неравномерное движение.

4. $a_n \neq 0$; $a_t \neq 0$ — криволинейное неравномерное движение.

Если в третьем случае $a_t = a = \text{const}$ и в четвертом $a_t = \text{const}$, то материальная точка будет совершать соответственно равноускоренное (равнозамедленное) прямолинейное

$$S = S_0 + v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$$

и равноускоренное (равнозамедленное) криволинейное движение

$$S = S_0 + v_0 t \pm a_t \frac{t^2}{2}.$$

Пример 1.10

Поезд движется равнозамедленно по закруглению радиусом $R = 1$ км. В начале участка поезд имел скорость 36 км/ч и полное ускорение $a_0 = 0,125$ м/с². Определить скорость и ускорение поезда в конце криволинейного участка, если длина участка 560 м.

Решение.

1. Будем рассматривать движение одной из точек поезда, например его центра тяжести. Совместим начало отсчета дуговой координаты 0 с начальным положением точки M_0 , направление движения принимаем за положительное (рис. 1.34). В этом случае величина S_0 будет равна нулю.

2. Запишем закон равнозамедленного движения материальной точки

$$S = v_0 t - \frac{a_t t^2}{2}$$

и формулу для определения скорости этого движения

$$v = v_0 - a_t t.$$

3. Определим нормальное ускорение точки в начале участка

$$a_{n0} = \frac{v_0^2}{R} - \frac{100}{1\,000} = 0,1 \text{ м/с}^2$$

$$(v_0 = 36 \text{ км/ч} = 10 \text{ м/с}; R = 1 \text{ км} = 1\,000 \text{ м}).$$

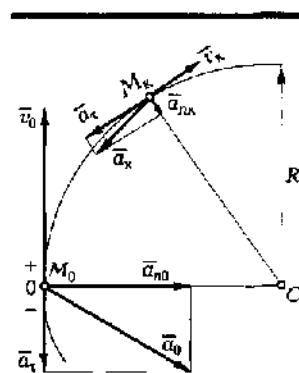


Рис. 1.34

4. Зная модуль полного ускорения точки в начале пути, определим его касательную составляющую:

$$a_0^2 = a_{n0}^2 + a_t^2; \quad a_t = \sqrt{a_0^2 - a_{n0}^2} = \sqrt{0,125^2 - 0,1^2} = 0,075 \text{ м/с}^2.$$

5. Подставляя в формулу движения выражение для касательной составляющей ускорения a_t , определим время t , в течение которого поезд прошел участок длиной 560 м:

$$560 = 10t - \frac{0,75t^2}{2}.$$

$$\text{Отсюда } t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 1 \cdot 120 \cdot 0,075}}{0,075} = \frac{10 \pm 4}{0,075} \text{ с.}$$

$$\text{Следовательно, } t_1 = \frac{14}{0,075} \text{ с; } t_2 = \frac{6}{0,075} \text{ с.}$$

Значение t_1 отбрасываем как нереальное, так как это время превышает время $t_2 = \frac{6}{0,075} \text{ с}$, через которое поезд окажется в конце пути. Поэто-

му принимаем во внимание только второй корень уравнения $t_2 = \frac{6}{0,075} \text{ с}$.

6. Определим скорость в конце пути:

$$v_k = 10 - 0,075t_k = 10 - 0,075 \cdot 80 = 4 \text{ м/с.}$$

7. Вычислим нормальное ускорение в конце пути:

$$a_{nk} = \frac{v_k^2}{R} = \frac{4^2}{1000} = 0,016 \text{ м/с}^2.$$

8. Определим полное ускорение в конце пути:

$$a_k = \sqrt{a_{nk}^2 + a_t^2} = \sqrt{0,016^2 + 0,075^2} = 0,0767 \text{ м/с}^2.$$

Из расчетов видно, что полное ускорение уменьшилось за счет уменьшения нормального ускорения, в то время как касательное ускорение осталось неизменным.

1.8. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательное движение

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, связанная с телом, остается параллельной своему начальному положению.

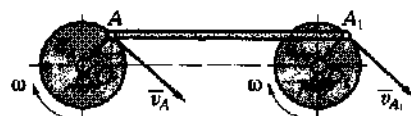


Рис. 1.35

При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют одинаковые (по значению и направлению) скорости и ускорения. Это основное свойство поступательного движения дает возможность изучать движение тела по одной из его точек. Примером поступательного движения является движение поршня паровой машины, ползуна с резцом в поперечно-строгальном станке. В этих случаях траектории точек тела прямолинейные. В спарнике двух колес (рис. 1.35) траектории точек представляют собой окружности; сам спарник AA_1 движется поступательно, а колеса вращаются. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть еще более сложными, например, при выпуске шасси у истребителя МиГ-21 колеса совершают поступательное движение, причем точки колеса движутся по пространственной кривой.

Вращательное движение относительно неподвижной оси

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных неподвижной прямой, называемой осью вращения тела, и описывают окружности, центры которых лежат на этой оси.

Для осуществления этого движения следует неподвижно закрепить две точки твердого тела A и B (рис. 1.36, а). Тогда прямая, проходящая через эти точки, является осью вращения. При вращении угол поворота тела меняется в зависимости от времени: $\varphi = f(t)$.

Эта зависимость называется **уравнением вращательного движения тела**. Угол поворота (в радианах) часто выражают через число оборотов N : $\varphi = 2\pi N$.

Величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота φ с течением времени, называется **угловой скоростью тела** и имеет размерность $1/\text{с}$. Ее значение определяется по формуле

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Учитывая, что дуга $S = r\varphi$ и, следовательно, $\varphi = S/r$, получим

$$\omega = \frac{dS}{r dt} = \frac{v_M}{r}.$$

Отсюда найдем линейную скорость точки вращающегося тела $v_M = \omega r$.

Угловая скорость вращения ω связана с частотой вращения n , мин^{-1} , следующей зависимостью:

$$\omega = (2\pi/60)n = \pi n / 30, \text{ 1/с}.$$

В этом случае линейная скорость точки тела может быть выражена также через частоту вращения:

$$v = (\pi n / 30)(d/2).$$

Размерность скорости будет зависеть от размерности диаметра d . Если d измеряется в миллиметрах (мм), то v будет выражена в метрах в секунду (м/с):

$$v = (\pi d n) / (60 \cdot 1000).$$

В технике чаще всего скорость выражается в метрах в минуту (м/мин), тогда

$$v = (\pi d n) / 1000.$$

Величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости с течением времени, называется **угловым ускорением** и имеет размерность $1/\text{с}^2$:

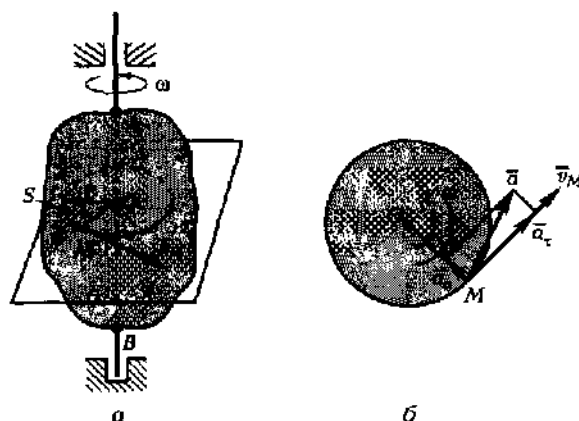


Рис. 1.36

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}.$$

Если $d\omega/dt > 0$ и $d\phi/dt > 0$, то движение ускоренное; если $d\omega/dt < 0$, $d\phi/dt > 0$, то движение замедленное.

Точка M тела участвует во вращательном движении, перемещаясь по окружности радиусом $OM = r$ (рис. 1.36, б). Поскольку ее траектория криволинейная, то ускорение

$$\vec{a} = a_t \vec{\tau} + a_n \vec{n}.$$

Касательная составляющая ускорения

$$a_t = |dv/dt| = |d\omega r/dt| = r |d\omega/dt| = r\epsilon;$$

направление a_t определяет направление ускорения ϵ (см. рис. 1.36, б).

Нормальная составляющая ускорения $a_n = v^2/\rho = (\omega r)^2/r = \omega^2 r$. Это ускорение направлено всегда к центру, поэтому называется **центростремительным**.

Полное ускорение точки вращающегося вокруг неподвижной оси тела

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

Введем понятия «вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ » и «вектор углового ускорения $\vec{\epsilon}$ ». Условимся откладывать вектор угловой скорости тела $\vec{\omega}$ по оси его вращения в ту сторону, откуда поворот тела виден происходящим против движения часовой стрелки (рис. 1.37). Модуль этого вектора равен абсолютному значению угловой скорости, $\omega = |d\phi/dt|$.

Вектор углового ускорения $\vec{\epsilon}$ при ускоренном вращении тела вокруг неподвижной оси будет направлен в ту же сторону, что и вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ (рис. 1.37, а), а при замедленном вращении — в противоположную (рис. 1.37, б). Модуль вектора $\vec{\epsilon}$ равен абсолютному значению углового ускорения $\epsilon = |d\omega/dt|$.

Векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\epsilon}$ могут быть приложены в любой точке оси вращения тела, поэтому эти векторы называются **скользящими**.

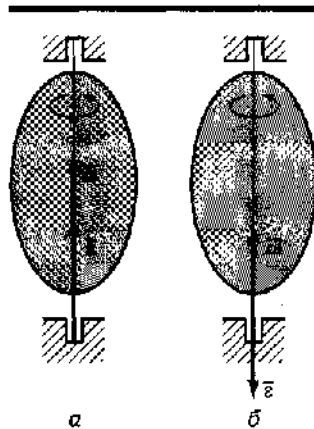


Рис. 1.37

Частные случаи вращательного движения тела

1. $\omega = \text{const}$. Зная, что $\omega = |d\varphi/dt| = \text{const}$, перепишем эту зависимость и проинтегрируем уравнение в пределах, соответствующих начальному моменту времени t_0 (соответственно φ_0) и произвольному моменту времени t :

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_{t_0}^t dt,$$

откуда $\varphi = \varphi_0 + \omega t$.

Этот результат соответствует закону равномерного вращательного движения тела.

2. $\varepsilon = \text{const}$ — равнопеременное вращательное движение (равноускоренное или равнозамедленное) тела. Вывод его закона движения аналогичен:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Плоское движение твердого тела

Плоским, или плоско-параллельным, движением твердого тела называется такое движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости.

Примерами плоского движения являются движение шайбы по льду, колеса поезда по прямолинейному участку пути.

Плоское движение тела можно разложить на поступательное и вращательное относительно выбранного центра. На рис. 1.38 показано, что тело из положения I можно переместить в положение II двумя способами:

а) перемещаем тело поступательно так, чтобы прямая AB , перемещаясь параллельно первоначальному положению, заняла в пространстве положение A_2B_1 . После этого повернем тело вокруг точки B_1 на угол φ_1 ;

б) переместим тело поступательно из положения I так, чтобы прямая AB совместилась с прямой A_1B_2 , параллельной ей. После этого будем вращать тело вокруг точки A_1 до тех пор, пока точка B_2 не попадет в точку B_1 . Поскольку $A_1B_2 \parallel A_2B_1$, то углы $\varphi_1 = \varphi_2$. Следо-

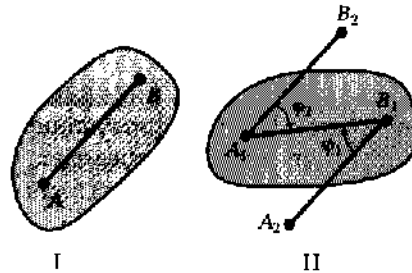


Рис. 1.38

вательно, чтобы занять положение II, тело может совершить различные поступательные движения (в зависимости от выбранного полюса), а вращение, как в первом, так и во втором случае, будет одинаковым.

Следовательно,

любое плоское движение тела можно разложить на поступательное движение тела вместе с выбранным полюсом и вращательное движение относительно полюса.

Чаще всего за такой полюс выбирают центр масс тела.

Теорема о скоростях точек плоской фигуры и ее следствия. Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и линейной скорости этой точки при вращении ее относительно полюса.

Примем за полюс точку O , скорость которой известна и равна $\vec{v}_O$. Определим скорость любой точки, например точки A , принадлежащей этой плоской фигуре (рис. 1.39, а). Проведем из произвольной неподвижной точки плоскости O_1 в точки O и A радиус-векторы $\vec{\rho}_O$ и $\vec{\rho}_A$, а из полюса O — радиус-вектор $\vec{r}_{OA}$ в точку A . Так как радиус-вектор $\vec{r}_{OA}$ соединяет две точки плоской фигуры, то при ее движении он вращается вокруг полюса O с угловой скоростью плоской фигуры $\vec{\omega}$, причем модуль этого вектора остается постоянным, так как не меняется расстояние между точкой A и полюсом. Кроме того, как видно из рис. 1.39, а, $\vec{\rho}_A = \vec{\rho}_O + \vec{r}_{OA}$.

Определим отсюда скорость точки A

$$\vec{v}_A = d\vec{\rho}_A/dt = d\vec{\rho}_O/dt + d\vec{r}_{OA}/dt.$$

Производная по времени от радиус-вектора $\vec{\rho}_O$ является скоростью полюса, а производная по времени от радиус-вектора $\vec{r}_{OA}$ —

не что иное, как линейная скорость точки A при вращении вокруг полюса O , которую обозначим $\vec{v}_{AO}$. Таким образом, теорема доказана:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{AO}.$$

Скорость $\vec{v}_{AO}$ можно представить в виде векторного произведения вектора угловой скорости плоской фигуры на радиус-вектор $\vec{r}_{OA}$:

$$\vec{v}_{AO} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OA}.$$

Вектор скорости $\vec{v}_{AO}$ направлен перпендикулярно отрезку OA в сторону вращения тела (рис. 1.39, б); его модуль $v_{AO} = \omega OA$.

Следствие 1. Проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны.

Предположим, что в данный момент времени известна угловая скорость ω плоской фигуры (ее модуль и направление) и скорость v_M точки M этой фигуры (см. рис. 1.39, б). Принимаем точку M за полюс и определяем на основе доказанной теоремы скорости точек B и C этой плоской фигуры, лежащих на одной прямой с полюсом M :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_M + \vec{v}_{BM} \text{ и } \vec{v}_C = \vec{v}_M + \vec{v}_{CM}.$$

Векторы скоростей $\vec{v}_{BM}$ и $\vec{v}_{CM}$ перпендикулярны отрезку MB и направлены в сторону вращения плоской фигуры. Проведем ось x через точки M , C и B и спроецируем на нее скорости

$$v_{xB} = v_{xM} + v_{xBM} \text{ и } v_{xC} = v_{xM} + v_{xCM}.$$

98340

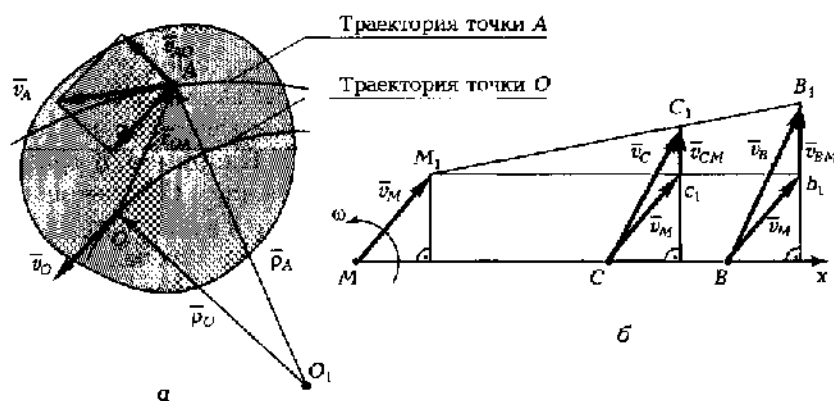


Рис. 1.39

Проекции v_{xBM} и v_{xCM} на ось x равны нулю, так как векторы $\vec{v}_{BM}$ и $\vec{v}_{CM}$ перпендикулярны этой оси. Следовательно, $v_{xB} = v_{xM} = v_{xC}$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. Концы векторов скоростей точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой и делят ее на части, пропорциональные расстояниям между соответствующими точками этого отрезка.

Из рис. 1.39, б очевидно, что

$$b_1 B_1 = v_{BM} = MB \cdot \omega, \quad c_1 C_1 = v_{CM} = MC \cdot \omega,$$

откуда $\frac{c_1 C_1}{b_1 B_1} = \frac{MC}{MB}$.

$MC = M_1 c_1$ и $MB = M_1 b_1$ как противоположные стороны параллелограммов.

Таким образом,

$$\frac{c_1 C_1}{b_1 B_1} = \frac{M_1 c_1}{M_1 b_1}.$$

Отсюда следует, что $M_1 C_1 B_1$ — отрезок прямой. Из подобия треугольников $M_1 c_1 C_1$ и $M_1 b_1 B_1$ имеем:

$$\frac{M_1 C_1}{M_1 B_1} = \frac{M_1 c_1}{M_1 b_1} \quad \text{или} \quad \frac{M_1 C_1}{M_1 B_1} = \frac{MC}{MB} \quad \text{и} \quad \frac{M_1 C_1}{C_1 B_1} = \frac{MC}{CB},$$

что и требовалось доказать.

Мгновенный центр скоростей. Неизменно связанная с телом точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю, называется *мгновенным центром скоростей*. Мгновенный центр скоростей (МЦС) лежит на перпендикулярах к скоростям точек тела, опущенных из этих точек (рис. 1.40, а). Различные случаи определения МЦС (обозначен буквой P) показаны на рис. 1.40, б—г.

Преобразование движений. В машинах очень часто происходит преобразование одного движения в другое. Например, в кривошипно-шатунном механизме (рис. 1.41) кривошип OA совершает вращательное движение, которое преобразуется в поступательное перемещение ползуна B . При решении практических задач бывает необходимо найти законы этого движения или скорости.

Пример 1.11

В кривошипно-шатунном механизме (см. рис. 1.41) за один оборот кривошипа ползун проходит путь, равный 400 мм. Какой путь пройдет за это время точка A ? Где будет находиться МЦС звена AB , когда кривошип OA займет вертикальное положение?

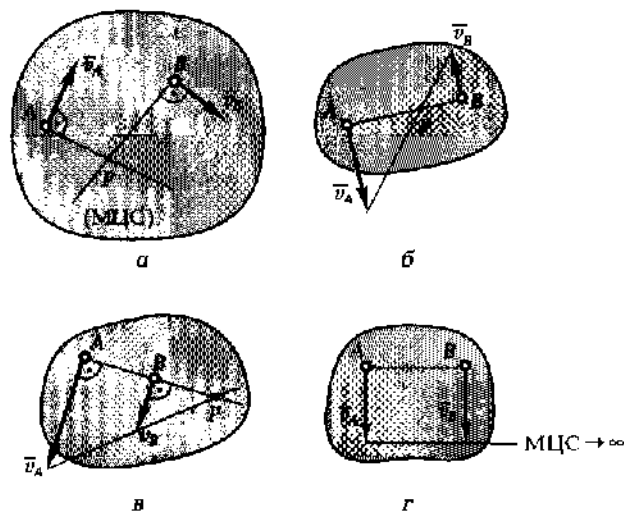


Рис. 1.40

Решение

1. Рассмотрим, по каким траекториям движутся точки A и B и какие движения совершают тела, которым они принадлежат. Точка A принадлежит двум телам, движения которых различны. С одной стороны, точка A участвует во вращательном движении кривошипа OA , а с другой стороны, она принадлежит шатуну AB , который совершает плоское движение. Точка B также соединяет две детали: шатун AB и ползун B . Поскольку точка B принадлежит ползуну, совершающему поступательное движение, при котором все его точки движутся прямолинейно, то для нее всегда известна траектория движения — это горизонтальная прямая. Таким образом, зная направления скоростей точек A и B , можно найти положение мгно-

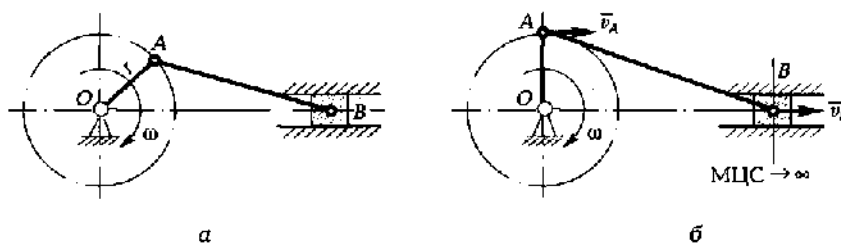


Рис. 1.41

вешнего центра скоростей для кривошипно-шатунного механизма, когда кривошип OA занимает вертикальное положение. Из рис. 1.41, б видно, что МЦС лежит в бесконечности. Следовательно, все точки звена AB имеют одинаковые скорости.

2. За один оборот кривошипа точка A проходит путь $S = 2\pi r$. Ползун B за один оборот пройдет путь, равный $4r$. Следовательно, можно найти радиус кривошипа, если известен пройденный путь точки B :

$$4r = 400 \text{ мм}; r = 100 \text{ мм.}$$

3. Зная радиус r кривошипа, можно определить пройденный точкой A путь за один оборот кривошипа:

$$S = 2\pi r = 2\pi \cdot 100 = 628 \text{ мм.}$$

1.9. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Относительное, переносное и абсолютное движение точки

Сложное движение точки — это такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или нескольких движениях. Например, пассажир перемещается по палубе движущегося теплохода, который плывет по течению реки. Какова же будет траектория движения пассажира и его скорость по отношению к поверхности Земли, если русло реки проходит под углом к меридиану Земли? На этот вопрос можно ответить только после изучения понятий об относительном, переносном и абсолютном движении точки.

Рассмотрим движущееся в пространстве тело (рис. 1.42) и точку M , не принадлежащую этому телу, а совершающую по отношению к нему некоторое перемещение. Через произвольную точку O движущегося тела проведем оси Ox , Oy , Oz , связанные с этим телом. Эта система координат называется **подвижной системой отсчета**.

Неподвижной системой отсчета будет система осей O_1x_1 , O_1y_1 , O_1z_1 , связанная с некоторым условно неподвижным телом, обычно с Землей.

Движение точки M относительно неподвижной системы отсчета называется **абсолютным** движением точки. Скорость и ускорение точки в абсолютном движении называются абсолютной скоростью и абсолютным ускорением и обозначаются $\vec{v}$ и $\vec{a}$.

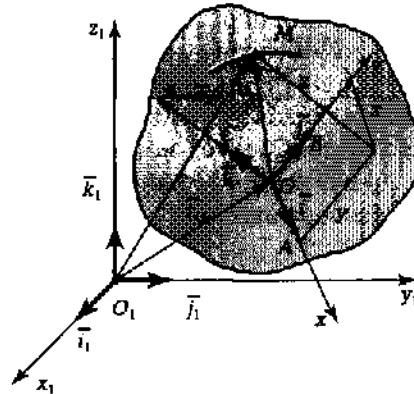


Рис. 1.42

Движение точки M по отношению к подвижной системе отсчета называют **относительным** движением точки, скорость и ускорение в относительном движении называют относительной скоростью и относительным ускорением, обозначают $\bar{v}_r$ и $\bar{a}_r$.

Движение подвижной системы отсчета $Oxyz$ и неизменно связанного с ней тела по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ является **переносным** движением. Скорость и ускорение точки тела, совпадающей в данный момент с движущейся по нему точкой M , называется переносной скоростью и ускорением и обозначается $\bar{v}_e$ и $\bar{a}_e$.

Теорема о сложении скоростей. Известно, что вектор скорости материальной точки

$$\bar{v} = d\bar{r}/dt.$$

Радиус-вектор $\bar{r}_M$ точки M связан с радиусом-вектором начала отсчета подвижной системы координат следующей зависимостью:

$$\bar{r}_M = \bar{r}_O + \bar{\rho},$$

где $\bar{\rho}$ — радиус-вектор точки M в подвижной системе отсчета; он определяет положение точки в ее относительном движении.

Вычислим вектор скорости точки M :

$$\bar{v}_M = \frac{d}{dt}(\bar{r}_M) = \frac{d}{dt}(\bar{r}_O + \bar{\rho}), \text{ или } \bar{v}_M = \frac{d}{dt}(\bar{r}_O) + \frac{d}{dt}(\bar{\rho}).$$

В полученном выражении первое слагаемое представляет собой скорость ($\bar{v}_O$) точки O тела относительно неподвижной системы координат. Поскольку орты $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ меняют положение в пространстве вместе с телом, то, следовательно, производная от них по времени не будет равна нулю. Следует заметить также, что точка O , в которой эти орты пересекаются, для них всегда неподвижна. Следовательно, эти орты совершают мгновенное вращение вокруг оси, проходящей через точку O .

Вычислим производную $\frac{d}{dt}(\bar{\rho})$:

$$\frac{d}{dt}(\bar{\rho}) = \frac{d}{dt}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \bar{i} \frac{dx}{dt} + \bar{j} \frac{dy}{dt} + \bar{k} \frac{dz}{dt} + x \frac{d\bar{i}}{dt} + y \frac{d\bar{j}}{dt} + z \frac{d\bar{k}}{dt}.$$

Первые три слагаемых представляют собой относительную скорость точки M

$$\bar{v}_r = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}.$$

Здесь $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$ и $v_z = \frac{dz}{dt}$ — проекции вектора относительной скорости $\bar{v}_r$ на соответствующие оси координат.

Итак,

$$\bar{v}_M = \bar{v}_O + x \frac{d\bar{i}}{dt} + y \frac{d\bar{j}}{dt} + z \frac{d\bar{k}}{dt} + \bar{v}_r.$$

Рассмотрим, что представляет собой производная, например, $\frac{d\bar{k}}{dt}$. Если, как было отмечено ранее, орт $\bar{k}$ может совершать толь-

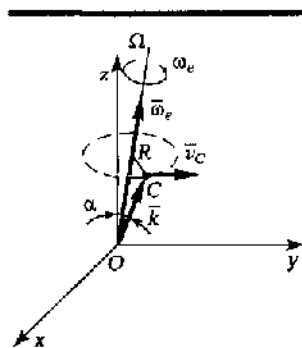


Рис. 1.43

ко мгновенное вращение вокруг точки O , то существует мгновенная ось вращения OQ (рис. 1.43).

Как известно, производная от радиус-вектора есть линейная скорость конца этого вектора. Поскольку орт $\bar{k}$ — вектор, то $d\bar{k}/dt = \bar{v}_C$. Следовательно,

$$x \frac{d\bar{i}}{dt} + y \frac{d\bar{j}}{dt} + z \frac{d\bar{k}}{dt} = x\bar{v}_A + y\bar{v}_B + z\bar{v}_C.$$

Вычислим линейную скорость конца вектора, направленную по касательной к

окружности, $v_c = R\omega = |\vec{k}|\omega \sin \alpha = \omega \sin \alpha$. Зная, что модуль векторного произведения $\vec{\omega} \times \vec{k}$ будет тоже равняться $\omega \sin \alpha$ и векторы $\vec{\omega}$, $\vec{k}$ и $\vec{v}_c$ взаимно-перпендикулярны, можно записать $\vec{v}_c = \vec{\omega} \times \vec{k}$. Аналогично запишем: $\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{j}$ и $\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{i}$. Таким образом,

$$x \frac{d\vec{i}}{dt} = x \vec{v}_A = x \vec{\omega} \times \vec{i} = \vec{\omega} \times x \vec{i};$$

$$y \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times y \vec{j}; \quad z \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times z \vec{k},$$

или

$$x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = \vec{\omega} \times \vec{\rho}.$$

В результате мы получаем следующую зависимость:

$$\vec{v}_M = (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) + \vec{v}_r.$$

Выражение в скобках представляет собой скорость точки тела, которая совпадает в данный момент с точкой M , движущейся относительно этого тела (так как она равна сумме скорости полюса $\vec{v}_O$ и линейной скорости $\vec{\omega} \times \vec{\rho}$ при вращении относительно этого полюса). В результате получено равенство

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

которое выражает теорему о сложении скоростей:

абсолютная скорость точки равна геометрической сумме ее переносной и относительной скоростей.

Эту теорему иногда называют **правилом параллелограмма скоростей**.

В общем случае модуль абсолютной скорости можно вычислить по формуле

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_e)}.$$

Пример 1.12

Пассажир идет вдоль вагона со скоростью 0,5 км/ч в сторону, противоположную направлению движения поезда. Поезд движется по прямолинейному участку пути со скоростью 60 км/ч. С какой скоростью пассажир перемещается относительно стрелений?

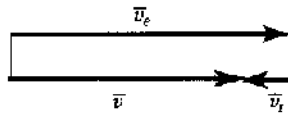


Рис. 1.44

Решение.

1. Определим переносную скорость. Поскольку вагон едет по прямолинейному пути, то он совершает поступательное движение. Следовательно, все точки имеют одинаковую скорость, т. е. $v_e = 60$ км/ч.

2. Определим абсолютную скорость пассажира. На основании теоремы о сложении скоростей при сложном движении точки $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ (рис. 1.44). Поскольку все векторы параллельны, то $v = 60 - 0,5 = 59,5$ км/ч.

Отв е т. Пассажир перемещается относительно строений в направлении движения поезда с абсолютной скоростью 59,5 км/ч.

1.10. СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Сложение вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей

Рассмотрим сложное движение твердого тела, представляющее собой совокупность двух вращательных движений тела вокруг осей, пересекающихся в одной точке. Примером такого движения является движение диска, показанного на рис. 1.45, а. Вращение этого диска относительно оси ON является его относительным движением, поэтому угловую скорость этого вращательного движения обозначим ω_r . Вращение самой оси ON вокруг оси Oz — это переносное движение, поэтому эту угловую скорость обозначим ω_e . Определим, каким будет абсолютное движение тела в этом случае.

Построим на векторах $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\omega}_r$ параллелограмм (рис. 1.45, б). Покажем, что диагональ OC этого параллелограмма представляет собой вектор угловой скорости результирующего вращения тела, которое происходит вокруг оси OQ . Скорость точки O равна нулю, так как она находится одновременно на двух мгновенных осях вращения ON и Oz . Определим скорость точки C . Так как эта точка принадлежит телу, участвующему в сложном движении, то ее скорость определяется по теореме о сложении скоростей:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Вычислим линейную скорость точки C в ее относительном вращении вокруг оси ON :

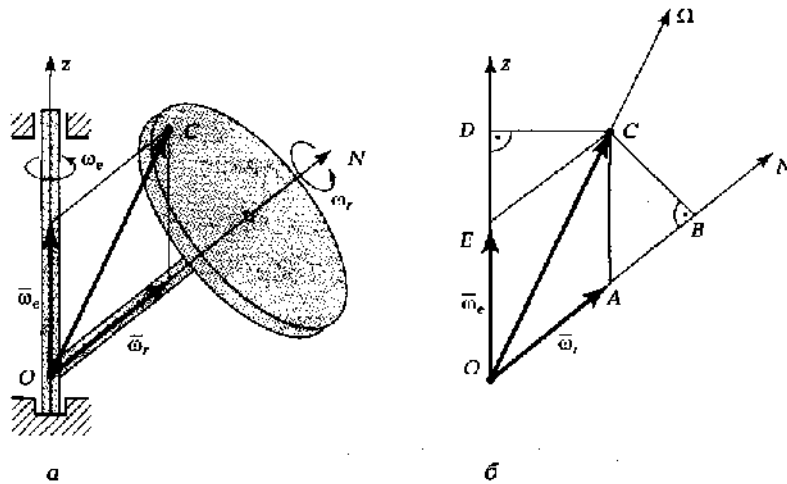


Рис. 1.45

$$v_r = BC\omega_r = 2 \text{ площади } \triangle OAC.$$

Вектор скорости $\bar{v}_r$ перпендикулярен плоскости OAC и направлен «на себя». Модуль линейной скорости точки C в ее переносном движении будет равен

$$v_e = DC\omega_e = 2 \text{ площади } \triangle OEC.$$

Вектор этой скорости направлен перпендикулярно плоскости OEC в сторону «от себя». Поскольку площади треугольников OAC и OEC равны по построению, то в точке C приложены два вектора, равные по величине и противоположно направленные, а следовательно, их сумма равна нулю.

Таким образом, прямая OΩ, проходящая через две неподвижные точки O и C, является мгновенной осью вращения тела. Тогда можно считать, что диск (как и любое другое тело произвольной формы) мгновенно вращается вокруг оси OΩ. В этом случае скорость любой точки M (рис. 1.46) может быть определена так:

$$\bar{v}_M = \bar{\omega} \times \bar{R}.$$

С другой стороны, эта точка участвует в сложном движении, поэтому ее скорость можно записать иначе

$$\bar{v}_M = \bar{v}_r + \bar{v}_e,$$

где $\bar{v}_r = \bar{\omega}_r \times \bar{R}$, а $\bar{v}_e = \bar{\omega}_e \times \bar{R}$.

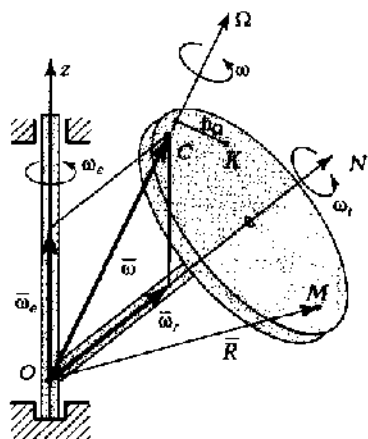


Рис. 1.46

Таким образом,

$$\vec{\omega} \times \vec{R} = \vec{\omega}_r \times \vec{R} + \vec{\omega}_e \times \vec{R},$$

откуда $\vec{\omega} \times \vec{R} = (\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e) \times \vec{R}$.

Следовательно,

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e.$$

Таким образом,

геометрическая сумма векторов угловых скоростей относительного и переносного вращений равна вектору угловой скорости абсолютного вращения.

Установленное соотношение называют правилом параллелограмма угловых скоростей.

Построив параллелограмм угловых скоростей, скорость любой точки тела (например, для точки K) при сложении двух вращательных движений относительно пересекающихся осей можно определить относительно мгновенной оси вращения (см. рис. 1.46):

$$v_K = \omega h_{\Omega}.$$

Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей

В этом случае векторы относительной и переносной угловых скоростей параллельны. Здесь возможно несколько вариантов.

1. **Относительное и переносное вращения направлены в одну сторону.** Допустим, что плоская фигура I (рис. 1.47, а) вращается относительно плоскости II. В свою очередь, плоскость II совершает вращение относительно неподвижной плоскости III, тогда абсолютное движение плоской фигуры I будет составным по отношению к плоскости III; движение плоскости II в этом случае является переносным. Плоские фигуры I и II могут совершать аналогичные движения в плоскости III (рис. 1.47, б). Поскольку оба движения являются вращательными, то в точках пересечения осей вращения Ω_c и Ω_r с плоскостью III скорости будут равны нулю: в точке P_e — переносная, а в точке P_r — относительная. Как известно,

абсолютная скорость любой точки в сложном движении равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей. Так как переносная скорость точки P_e равна нулю, то ее абсолютная скорость будет равна относительной скорости:

$$\bar{v}_{Pe} = \bar{v}_r + \bar{v}_e = \bar{v}_r + 0 = \bar{v}_r.$$

Модуль этой скорости определяют по формуле $v_{Pe} = P_e P_r \omega_r$. Направлена она будет перпендикулярно ее радиусу вращения (отрезку $P_e P_r$) — «на себя».

Аналогичные рассуждения справедливы и для точки P_r , т. е. абсолютная скорость $\bar{v}_{Pr} = \bar{v}_r + \bar{v}_e = 0 + \bar{v}_e = \bar{v}_e$. Модуль этой скорости $v_{Pr} = P_e P_r \omega_e$, а вектор перпендикулярен отрезку $P_e P_r$ и направлен в сторону переносного вращения, т. е. «от себя».

Отложим на чертеже векторы абсолютных скоростей точек P_e и P_r , после чего найдем мгновенный центр скоростей P (рис. 1.47, в). Из рисунка видно, что движение плоской фигуры I складывается

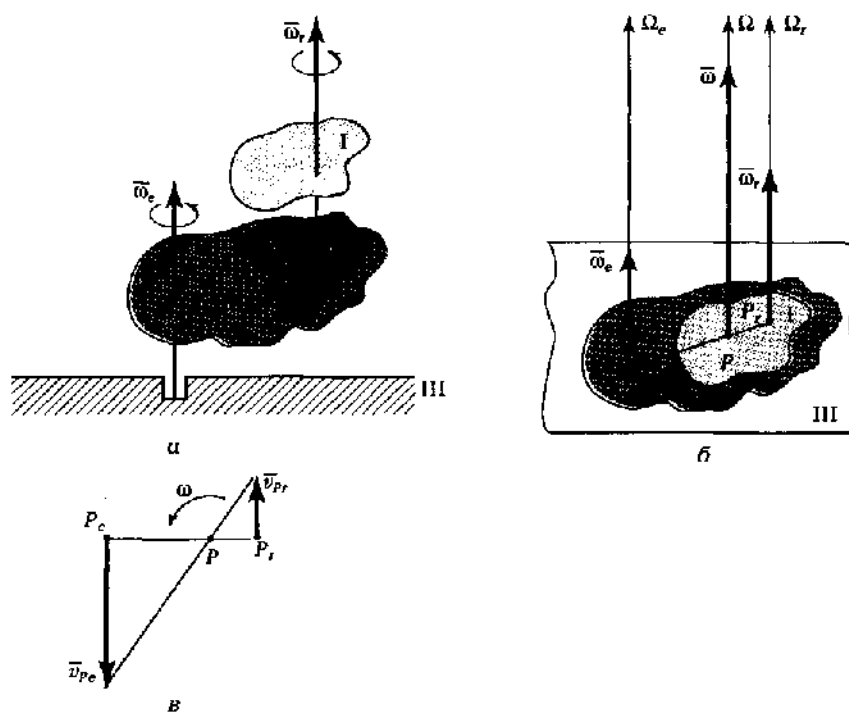


Рис. 1.47

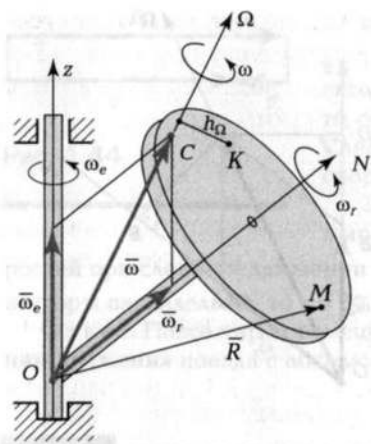


Рис. 1.46

Таким образом,

$$\vec{\omega} \times \vec{R} = \vec{\omega}_r \times \vec{R} + \vec{\omega}_e \times \vec{R},$$

откуда $\vec{\omega} \times \vec{R} = (\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e) \times \vec{R}$.

Следовательно,

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e.$$

Таким образом,

геометрическая сумма векторов угловых скоростей относительного и переносного вращений равна вектору угловой скорости абсолютного вращения.

Установленное соотношение называют правилом параллелограмма угловых скоростей.

Построив параллелограмм угловых скоростей, скорость любой точки тела (например, для точки K) при сложении двух вращательных движений относительно пересекающихся осей можно определить относительно мгновенной оси вращения (см. рис. 1.46):

$$v_K = \omega h_K.$$

Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей

В этом случае векторы относительной и переносной угловых скоростей параллельны. Здесь возможно несколько вариантов.

1. **Относительное и переносное вращения направлены в одну сторону.** Допустим, что плоская фигура I (рис. 1.47, а) вращается относительно плоскости II. В свою очередь, плоскость II совершает вращение относительно неподвижной плоскости III, тогда абсолютное движение плоской фигуры I будет составным по отношению к плоскости III; движение плоскости II в этом случае является переносным. Плоские фигуры I и II могут совершать аналогичные движения в плоскости III (рис. 1.47, б). Поскольку оба движения являются вращательными, то в точках пересечения осей вращения Ω_e и Ω_r с плоскостью III скорости будут равны нулю: в точке P_e — переносная, а в точке P_r — относительная. Как известно,

абсолютная скорость любой точки в сложном движении равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей. Так как переносная скорость точки P_e равна нулю, то ее абсолютная скорость будет равна относительной скорости:

$$\bar{v}_{Pe} = \bar{v}_r + \bar{v}_e = \bar{v}_r + 0 = \bar{v}_r.$$

Модуль этой скорости определяют по формуле $v_{Pe} = P_e P_r \omega_r$. Направлена она будет перпендикулярно ее радиусу вращения (отрезку $P_e P_r$) — «на себя».

Аналогичные рассуждения справедливы и для точки P_r , т.е. абсолютная скорость $\bar{v}_{Pr} = \bar{v}_r + \bar{v}_e = 0 + \bar{v}_e = \bar{v}_e$. Модуль этой скорости $v_{Pr} = P_e P_r \omega_e$, а вектор перпендикулярен отрезку $P_e P_r$ и направлен в сторону переносного вращения, т.е. «от себя».

Отложим на чертеже векторы абсолютных скоростей точек P_e и P_r , после чего найдем мгновенный центр скоростей P (рис. 1.47, в). Из рисунка видно, что движение плоской фигуры I складывается

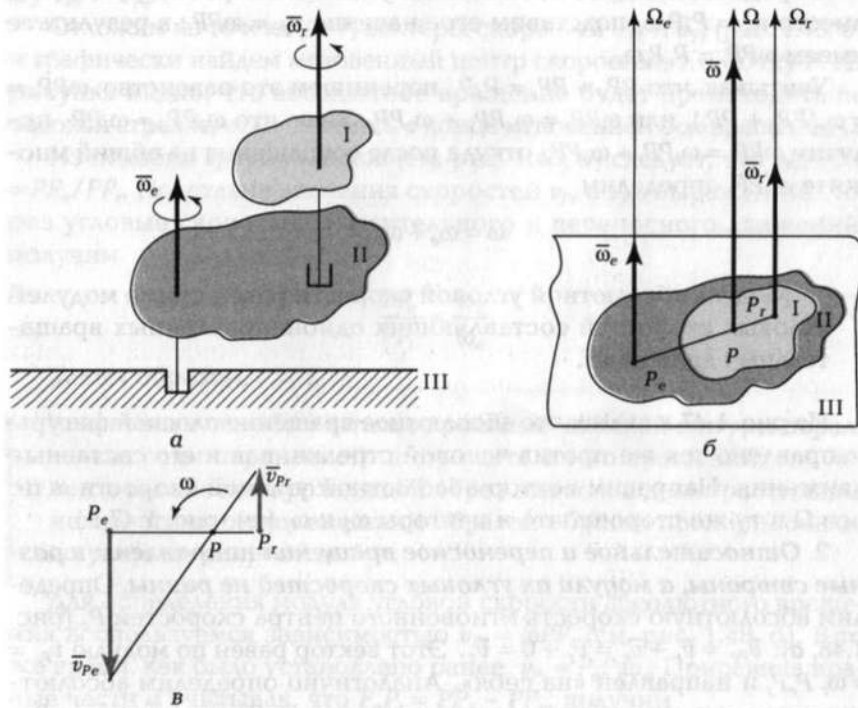


Рис. 1.47

из двух параллельных однонаправленных вращательных движений с угловой скоростью

$$\omega = v_{Pr}/PP_r = v_{Pe}/PP_e.$$

Из подобия треугольников следует, что $v_{Pe}/v_{Pr} = PP_e/PP_r$. Подставив значения скоростей v_{Pr} и v_{Pe} , выраженные через угловые скорости относительного и переносного движений, получим

$$\frac{PP_e}{PP_r} = \frac{\omega_r}{\omega_e}.$$

Следовательно,

мгновенная ось вращения Ω (см. рис. 1.47, б) проходит через мгновенный центр скоростей, точку Р, параллельно осям Ω_e и Ω_r , деля при этом расстояние между этими осями на отрезки, обратно пропорциональные угловым скоростям.

Определим модуль абсолютной угловой скорости. Для этого вместо $v_{Pr} = P_e P_r \omega_e$ подставим его значение $v_{Pr} = \omega PP_r$; в результате имеем $\omega PP_r = P_e P_r \omega_e$.

Учитывая, что $PP_e + PP_r = P_e P_r$, перепишем это равенство: $\omega PP_r = \omega_e (PP_e + PP_r)$, или $\omega PP_r = \omega_e PP_e + \omega_e PP_r$. Зная, что $\omega_e PP_e = \omega_r PP_r$, получим $\omega PP_r = \omega_r PP_r + \omega_e PP_r$, откуда после сокращения на общий множитель PP_r определим

$$\omega = \omega_e + \omega_r.$$

Модуль абсолютной угловой скорости равен сумме модулей угловых скоростей составляющих однонаправленных вращательных движений.

Из рис. 1.47, в видно, что абсолютное вращение плоской фигуры направлено так же против часовой стрелки, как и его составные движения. Направим вектор абсолютной угловой скорости ω по оси Ω в ту же сторону, что и векторы ω_e и ω_r (см. рис. 1.47, б).

2. Относительное и переносное вращения направлены в разные стороны, а модули их угловых скоростей не равны. Определим абсолютную скорость мгновенного центра скоростей P_e (рис. 1.48, а): $\vec{v}_{Pe} = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{v}_r + 0 = \vec{v}_r$. Этот вектор равен по модулю $v_{Pe} = \omega_r P_e P_r$ и направлен «на себя». Аналогично определим абсолютную скорость мгновенного центра скоростей P_r : $\vec{v}_{Pr} = \vec{v}_r + \vec{v}_e = 0 + \vec{v}_e = \vec{v}_e$. Точка P_r в переносном движении вращается вокруг оси Ω_e

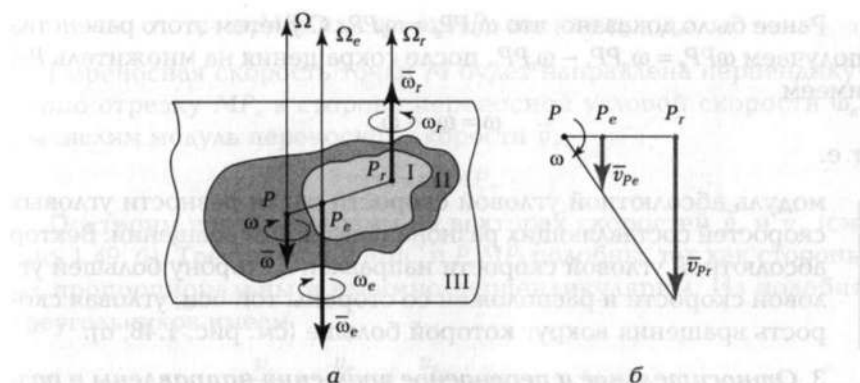


Рис. 1.48

против хода часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\bar{\omega}_e$. Следовательно, вектор $\bar{v}_{pr}$ направлен «на себя». Модуль вектора $\bar{v}_{pr}$ будет равен $v_{pr} = \omega_e P_e P_r$. На рис. 1.48, а показано, что $\bar{\omega}_e > \bar{\omega}_r$ поэтому $v_{pr} > v_{pe}$.

Отложим из точек P_e и P_r векторы скоростей $\bar{v}_{pe}$ и $\bar{v}_{pr}$ (рис. 1.48, б) и графически найдем мгновенный центр скоростей, т. е. точку P . Из рисунка видно, что абсолютное вращение будет происходить по часовой стрелке, если смотреть с конца мгновенной оси вращения Ω .

Из подобия треугольников (см. рис. 1.48, б) следует, что $v_{pe}/v_{pr} = PP_e/PP_r$. Подставив значения скоростей v_{pr} и v_{pe} , выраженные через угловые скорости относительного и переносного движений, получим

$$\frac{PP_e}{PP_r} = \frac{\omega_r}{\omega_e}.$$

Таким образом,

мгновенная ось абсолютного вращения плоской фигуры параллельна осям переносного и относительного вращений; она лежит в плоскости, проходящей через эти оси, и делит расстояние между этими осями внешним образом обратно пропорционально угловым скоростям.

Для определения модуля угловой скорости абсолютного вращения воспользуемся зависимостью $v_{pr} = \omega PP_r$ (см. рис. 1.48, б). В то же время, как было установлено ранее, $v_{pr} = P_e P_r \omega_e$. Приравняв правые части и учитывая, что $P_e P_r = PP_r - PP_e$, получим

$$\omega PP_r = \omega_e (PP_r - PP_e), \text{ или } \omega PP_r = \omega_e PP_r - \omega_e PP_e.$$

Ранее было доказано, что $\omega_e PP_e = \omega_r PP_r$. С учетом этого равенства получаем $\omega PP_r = \omega_e PP_r - \omega_r PP_r$, после сокращения на множитель PP_r имеем

$$\omega = \omega_e - \omega_r$$

т.е.

модуль абсолютной угловой скорости равен разности угловых скоростей составляющих разнонаправленных вращений. Вектор абсолютной угловой скорости направлен в сторону большей угловой скорости и расположен со стороны той оси, угловая скорость вращения вокруг которой больше (см. рис. 1.48, а).

3. Относительное и переносное вращения направлены в разные стороны, модули их угловых скоростей равны (рис. 1.49, а). Определим для данного случая абсолютное движение плоской фигуры I. Поскольку модули угловых скоростей равны, то

$$\bar{\omega}_e = -\bar{\omega}_r$$

Относительное вращение вокруг оси Ω_r совершает фигура I, а переносное вращение вокруг оси Ω_e — фигура II. Поскольку для любой точки фигуры I имеет место равенство

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r$$

то для точки M это равенство также будет справедливо. Определим ее относительную скорость. Вектор $\bar{v}_r$ будет направлен по перпендикуляру к отрезку MP_r в направлении угловой скорости ω_r (рис. 1.49, б). Вычислим его модуль

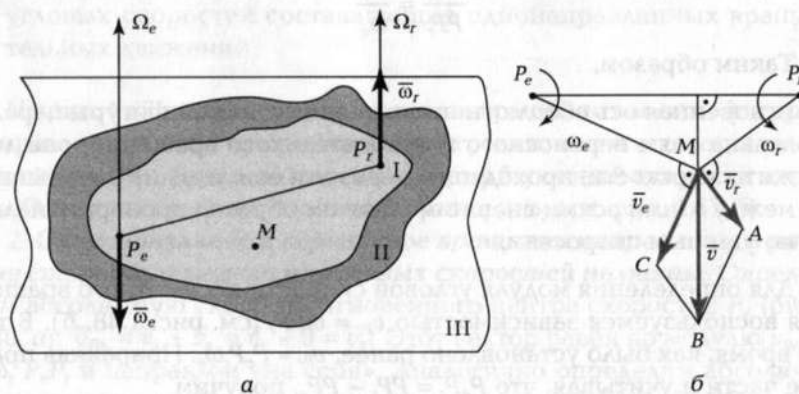


Рис. 1.49

$$v_r = \omega_r MP_r \text{ или } v_r = \omega_e MP_r, \text{ так как } \omega_r = \omega_e.$$

Переносная скорость точки M будет направлена перпендикулярно отрезку MP_e в сторону переносной угловой скорости ω_e . Вычислим модуль переносной скорости $\bar{v}_e$

$$v_e = \omega_e MP_e.$$

Построим параллелограмм на векторах скоростей $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_e$ (см. рис. 1.49, б). Треугольники MBC и $P_e MP_r$ подобны, так как стороны их пропорциональны и взаимно-перпендикулярны. Из подобия треугольников имеем

$$\frac{v}{P_e P_r} = \frac{v_e}{MP_e} = \frac{v_r}{MP_r} = \omega_e = \omega_r = \omega.$$

Так как стороны MC и CB перпендикулярны соответственно сторонам MP_e и MP_r , то третьи стороны этих треугольников будут также перпендикулярны, т.е. вектор $\bar{v}$ перпендикулярен стороне $P_e P_r$. Значит, вектор скорости любой точки, выбранной произвольно, должен быть перпендикулярен отрезку $P_e P_r$, а ее модуль равен

$$v = \omega P_e P_r.$$

Если скорости всех точек тела одинаковы по модулю и направлению, то мгновенный центр скоростей такого тела лежит в бесконечности — тело совершает поступательное движение.

Таким образом,

при сложении двух вращений с равными по модулю, но противоположно направленными угловыми скоростями результирующим движением является поступательное.

Совокупность двух вращений, направленных в противоположные стороны и имеющих равные по модулю угловые скорости, называется **парой вращений**.

Пример 1.13

Механизм приводится в движение кривошипом OB , который вращается с угловой скоростью ω_O (рис. 1.50, а). Определить, с какой скоростью звено AC вращается относительно кривошипа OB и его мгновенную абсолютную угловую скорость, используя теорему о сложении вращений относительно параллельных осей.

Решение.

1. Определяем относительную угловую скорость звена AC .

Звено AC совершает сложное движение. Его точка B принадлежит одновременно звену OB и AC , поэтому скорость ее в относительном вращательном движении равна нулю. Значит, это мгновенный центр скоростей

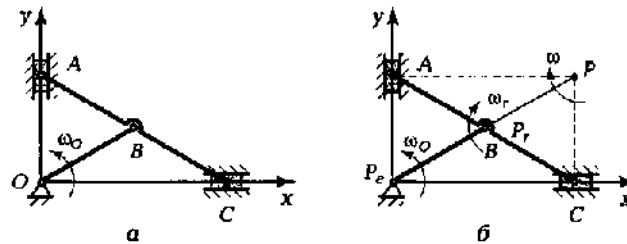


Рис. 1.50

звена AC в его относительном вращательном движении; обозначим его ω_r (рис. 1.50, б). Переносным вращением является вращение кривошипа OB относительно неподвижной точки O ; обозначим эту точку P_o . Оси переносного и относительного вращений перпендикулярны плоскости чертежа, т. е. параллельны между собой. Следовательно, можно применить теорему о сложении вращательных движений относительно параллельных осей.

Поскольку известны направления скоростей точек A и C звена AC (соответственно вдоль осей Ox и Oy), то можно найти МЦС этого звена, т. е. точку P (см. рис. 1.50, б).

Вычислим отношение ω_r/ω_e (см. подразд. 1.10):

$$\frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{PP_o}{PP_r} = \frac{2OB}{OB} = 2.$$

Отсюда относительная угловая скорость вращения $\omega_r = 2\omega_e = 2\omega_O$.

2. Определяем мгновенную абсолютную угловую скорость звена AC .

Точка P (МЦС абсолютного вращательного движения) лежит на отрезке P_oP_r и делит его внешним образом, следовательно, направления переносной и относительной угловых скоростей противоположные. А так как точка P находится ближе к P_r , чем к P_o , то $\omega_r > \omega_e$, и тогда абсолютная угловая скорость звена AB будет равна

$$\omega = \omega_r - \omega_e = 2\omega_O - \omega_O = \omega_O.$$

О т в е т. Относительная угловая скорость звена AC в данный момент в два раза больше, чем угловая скорость кривошипа OB , и направлена в противоположную сторону.

Абсолютная угловая скорость звена AC в данный момент равна угловой скорости кривошипа OB , но направлена в другую сторону.

1.11. ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ, УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА

Динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел под действием приложенных к ним

сил. В основе динамики лежат законы, сформулированные Ньютоном.

Первый закон — закон инерции, установленный Галилеем, гласит:

материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие других тел не изменит это состояние.

Второй закон — основной закон динамики — устанавливает связь между ускорением $\vec{a}$, массой m материальной точки M и силой $\vec{F}$ (рис. 1.51, а):

ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление.

Запишем этот закон в форме, которую придал ему Эйлер:

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

В классической механике масса m принята за постоянную величину. Масса является мерой инертности материальных тел в их поступательном движении. Запишем основной закон динамики в скалярном виде, проецируя векторные величины, входящие в равенство, на оси координат:

$$ma_x = F_x; \quad ma_y = F_y; \quad ma_z = F_z.$$

Третий закон формулируется следующим образом:

всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Этот закон устанавливает, что при взаимодействии двух тел, в каком бы кинематическом состоянии они не находились, силы, приложенные к каждому из них, равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

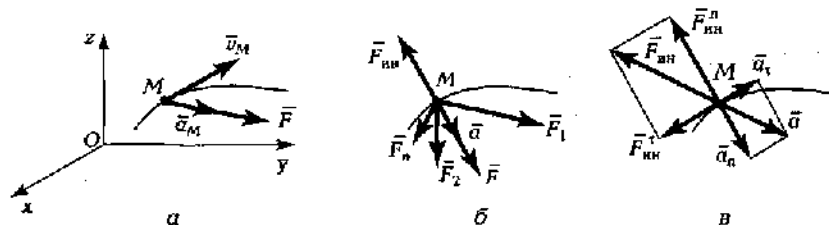


Рис. 1.51

Четвертый закон не был сформулирован Ньютоном как отдельный закон механики, но таковым можно считать сделанное им обобщение правила параллелограмма сил:

несколько одновременно действующих сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщала бы одна сила, равная их геометрической сумме.

Основной закон динамики можно записать в скалярном виде, спроецировав векторы либо на декартовы, либо на естественные оси координат. В первом случае получим **уравнения движения материальной точки в прямоугольной декартовой системе координат**:

$$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{y} = F_y; \quad m\ddot{z} = F_z,$$

где $\ddot{x} = a_x$; $\ddot{y} = a_y$; $\ddot{z} = a_z$.

Во втором случае получим **естественные уравнения движения**:

$$ma_n = F_n; \quad ma_\tau = F_\tau; \quad ma_b = F_b,$$

где $a_n = v^2/\rho$; $a_\tau = d^2S/dt^2$.

Проекция ускорения на бинормаль всегда равна нулю ($a_b = 0$), поэтому $F_b = 0$.

Пример 1.14

Уравнения движения материальной точки M массой m имеют вид

$$x = r \cos kt; \quad y = r \sin kt.$$

Определить равнодействующую приложенных к материальной точке сил и траекторию ее движения.

Решение.

1. Определяем проекции ускорения на оси координат. Для этого сначала определим проекции скорости на те же оси:

$$v_x = \dot{x} = -kr \sin kt; \quad v_y = \dot{y} = kr \cos kt.$$

С учетом этого получаем $a_x = \dot{v}_x = -k^2 r \cos kt$; $a_y = \dot{v}_y = -k^2 r \sin kt$.

2. Определяем проекции равнодействующей силы. Поскольку $F_x = m\ddot{x} = ma_x$ и $F_y = m\ddot{y} = ma_y$, то

$$F_x = -mk^2 \cos kt; \quad F_y = -mk^2 \sin kt.$$

3. Определяем модуль равнодействующей:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2 r \sqrt{\cos^2 kt + \sin^2 kt} = mk^2 r.$$

4. Определяем направление равнодействующей:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} = -\cos kt = -\frac{x}{r}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F} = -\sin kt = -\frac{y}{r}.$$

Очевидно, что угол наклона равнодействующей силы по отношению к осям координат меняется.

5. Определяем траекторию движения материальной точки. Для исключения переменной t возведем в квадрат и сложим уравнения движения. В результате получим уравнение окружности с радиусом r : $x^2 + y^2 = r^2$.

Из полученного решения можно сделать следующий вывод: материальная точка движется по окружности радиусом r под воздействием приложенной к ней силы, которая все время направлена к центру этой окружности.

Принцип Д'Аламбера

Принципом Д'Аламбера называют общий метод, с помощью которого уравнения динамики придается вид уравнений статики. Для этого вводится понятие «сила инерции материальной точки» — сила, равная произведению массы точки на ее ускорение и направленная противоположно ускорению:

$$\bar{F}_{ин} = -m\bar{a}.$$

Положим, что материальная точка M под действием системы сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ движется с ускорением $\bar{a}$ (рис. 1.51, б), в этом случае основное уравнение динамики будет иметь вид

$$m\bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n.$$

Перенесем член $m\bar{a}$ из левой части уравнения в правую. Тогда

$$0 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n - m\bar{a}.$$

Так как $-m\bar{a} = \bar{F}_{ин}$, то

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n + \bar{F}_{ин} = 0.$$

Полученное соотношение выражает **принцип Д'Аламбера** и формулируется следующим образом:

геометрическая сумма всех приложенных к точке сил и силы инерции этой точки равна нулю.

Принцип Д'Аламбера применим как для свободной, так и для несвободной материальной точки, так как, освобождая материаль-

нуто точку от связей и заменяя их действие пассивными силами, мы рассматриваем движение точки под действием активных и пассивных сил, которые сообщают ей ускорение.

Следует помнить, что к материальной точке инерционная сила приложена лишь условно. Фактически сила инерции приложена не к материальной точке, а к телу, сообщаящему ей ускорение. Этот метод получил широкое применение при расчетах на прочность при динамических нагрузках (см. пример 2.18 в главе 2).

Силу инерции можно разложить на касательную $F_{ин}^t$ (тангенциальную) и нормальную $F_{ин}^n$ (центробежную) составляющие (рис. 1.51, а):

$$F_{ин}^t = ma^t; F_{ин}^n = mv^2/\rho,$$

где ρ — радиус кривизны траектории.

В случае круговой траектории точки (радиус окружности r), принадлежащей телу, вращающемуся с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε , тангенциальная и центробежная составляющие силы инерции имеют вид

$$F_{ин}^t = m\varepsilon r; F_{ин}^n = m\omega^2 r.$$

1.12. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ТОЧКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Механической системой называют мысленно выделенную совокупность материальных точек, взаимодействующих между собой. Механическую систему иногда называют **материальной системой** или **системой материальных точек**. Существуют системы **свободных** (например, Солнечная система) и **несвободных** материальных точек (их движения ограничены связями). Примером системы несвободных точек может служить любой механизм или машина. Все силы, действующие на систему несвободных точек, подразделяют на **задаваемые (активные) силы** и **реакции связей (пассивные силы)**.

По другому признаку силы, действующие на точки любой механической системы, делят на **внешние** и **внутренние**. Условимся обозначать внешние силы $\vec{F}^E$, а внутренние силы $\vec{F}^J$.

Внешними называют силы, действующие на точки системы со стороны материальных точек, не входящих в состав данной системы.

Внутренними силами называются силы взаимодействия между материальными точками данной механической системы. Примером внутренних сил могут служить силы упругости, действующие между частицами упругого тела, принятого за механическую систему.

Одна и та же сила может быть как внешней, так и внутренней в зависимости от того, какая механическая система рассматривается. Например, реакции подшипников вала являются внешними силами по отношению к валу. Эти же реакции можно отнести к внутренним силам, если рассматривать всю установку вместе с машиной.

Таким образом, любая сила может быть внешней или внутренней, и то же время она может быть задаваемой или реакцией связи. Движение точек системы зависит как от внешних, так и от внутренних сил.

По закону равенства действия и противодействия каждой внутренней силе соответствует другая внутренняя сила, равная ей по модулю и противоположная по направлению. На основании этого можно сделать следующие выводы.

1. Главный вектор всех внутренних сил системы равен нулю:

$$\bar{R}^J = \sum_{i=1}^k \bar{F}_i^J = 0.$$

Следовательно, и суммы их проекций на координатные оси также равны нулю:

$$\sum_{i=1}^k \bar{F}_{ix}^J = 0; \quad \sum_{i=1}^k \bar{F}_{iy}^J = 0; \quad \sum_{i=1}^k \bar{F}_{iz}^J = 0.$$

2. Главный вектор-момент всех внутренних сил системы относительно любого центра и координатных осей равен нулю:

$$\bar{M}_O^J = \sum_{i=1}^k \bar{M}_{iO}^J = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^k \text{mom}_x(\bar{F}_i^J) = 0; \quad \sum_{i=1}^k \text{mom}_y(\bar{F}_i^J) = 0; \quad \sum_{i=1}^k \text{mom}_z(\bar{F}_i^J) = 0.$$

Эти уравнения имеют вид уравнений равновесия сил, произвольно приложенных в пространстве, однако в них входят внутренние силы, которые не уравновешиваются, так как они приложены к разным точкам системы и могут вызвать перемещение этих точек относительно друг друга.

1.13 ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Представим, что механическая система массой m состоит из k материальных точек (рис. 1.52). Известно (см. подразд. 1.6), что можно найти положение центра масс такой системы, если заданы массы m_i точек и их координаты:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^k m_i x_i}{m}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^k m_i y_i}{m}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^k m_i z_i}{m},$$

$$\text{или } mx_C = \sum_{i=1}^k m_i x_i; \quad my_C = \sum_{i=1}^k m_i y_i; \quad mz_C = \sum_{i=1}^k m_i z_i.$$

Дважды продифференцировав эти равенства, получим

$$m\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^k m_i \ddot{x}_i; \quad m\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^k m_i \ddot{y}_i; \quad m\ddot{z}_C = \sum_{i=1}^k m_i \ddot{z}_i.$$

Правые части полученных уравнений в соответствии с основным законом динамики представляют собой сумму внешних $\bar{F}_i^E$ и внутренних $\bar{F}_i^J$ сил, действующих на эти материальные точки, в проекциях на соответствующие оси координат. Следовательно, последние уравнения можно переписать так:

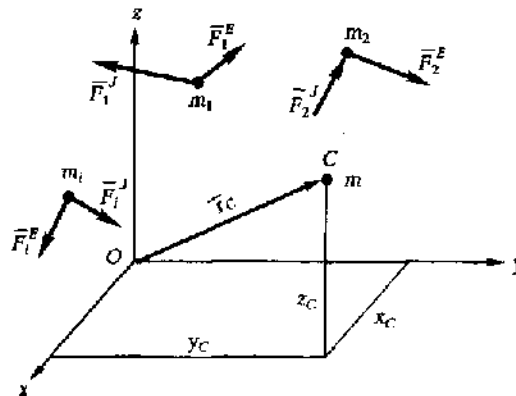


Рис. 1.52

$$m\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^k F_{ix}^E + \sum_{i=1}^k F_{ix}^J; \quad m\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^k F_{iy}^E + \sum_{i=1}^k F_{iy}^J; \quad m\ddot{z}_C = \sum_{i=1}^k F_{iz}^E + \sum_{i=1}^k F_{iz}^J.$$

Учитывая, что главный вектор внутренних сил равен нулю ($\vec{R}^J = 0$), получим

$$m\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^k F_{ix}^E; \quad m\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^k F_{iy}^E; \quad m\ddot{z}_C = \sum_{i=1}^k F_{iz}^E.$$

Эти уравнения выражают теорему о движении центра масс системы, которая формулируется следующим образом.

Центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе системы, к которой приложены все внешние силы, действующие на эту систему.

Отсюда следует, что внутренние силы не оказывают влияния на движение центра масс механической системы.

Пример 1.15

Определить перемещение плавучего крана, поднимающего груз массой 2000 кг, при повороте стрелы крана до вертикального положения (рис. 1.53). Масса крана 20 т. Длина стрелы AB равна 8 м. Сопротивлением воды пренебречь.

Решение.

1. Выбираем систему отсчета (рис. 1.53, а).

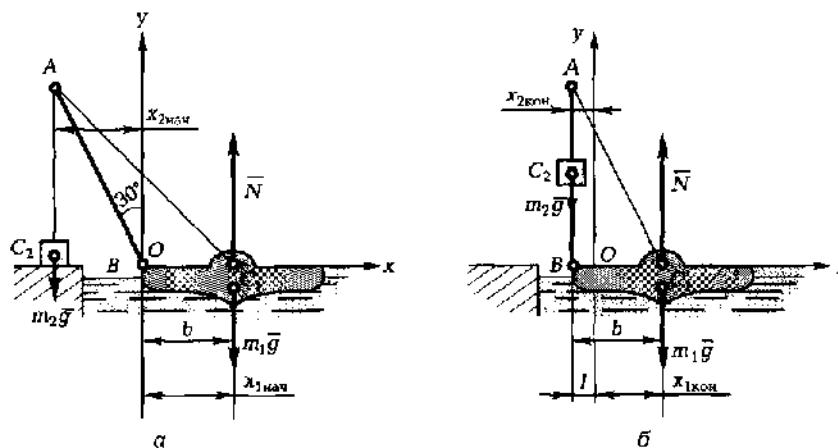


Рис. 1.53

2. Проставляем все внешние силы, действующие на материальные тела данной механической системы. На плавучий кран действуют сила тяжести $m_1\bar{g}$ (заданная сила) и сила $\bar{N}$ (реакция, т.е. пассивная сила); к грузу приложена только одна внешняя сила — его вес $m_2\bar{g}$.

3. Запишем уравнения движения центра масс механической системы

$$m\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^2 F_{ix}^E; \quad m\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^2 F_{iy}^E,$$

или

$$m\ddot{x}_C = 0; \quad m\ddot{y}_C = -m_1g - m_2g + N.$$

4. Будем исследовать первое уравнение, так как нас интересует движение центра масс по горизонтали. Поскольку $m\ddot{x}_C = 0$, то скорость центра масс вдоль оси Ox $v_{xC} = \text{const}$. Это означает, что скорость центра масс в этом направлении в любой момент времени неизменна, т.е. справедливо равенство $v_{xC \text{ нач}} = v_{xC \text{ кон}}$.

В начальный момент система находилась в покое, следовательно, $v_{xC \text{ нач}} = v_{xC \text{ кон}} = 0$. А так как $v_{xC} = dx_C/dt$, то $x_C = \text{const}$.

Таким образом, анализ уравнения движения центра масс вдоль оси Ox показал, что начальная и конечная координаты центра масс совпадают: $x_{C \text{ нач}} = x_{C \text{ кон}}$.

5. Запишем формулы для определения начального и конечного положений центра масс механической системы:

$$x_{C \text{ нач}} = \frac{m_1 x_{1 \text{ нач}} + m_2 x_{2 \text{ нач}}}{m_1 + m_2};$$

$$x_{C \text{ кон}} = \frac{m_1 x_{1 \text{ кон}} + m_2 x_{2 \text{ кон}}}{m_1 + m_2}.$$

6. Выразим начальные и конечные координаты материальных тел системы в соответствии с выбранной системой отсчета (см. рис. 1.53, а и б):

$$x_{1 \text{ нач}} = b; \quad x_{2 \text{ нач}} = -AB \sin 30^\circ = -8 \cdot \frac{1}{2} = -4 \text{ м};$$

$$x_{1 \text{ кон}} = b - l; \quad x_{2 \text{ кон}} = -l.$$

7. Определяем перемещение l плавучего крана. Приравнявая $x_{C \text{ нач}} = x_{C \text{ кон}}$, получим

$$m_1 x_{1 \text{ нач}} + m_2 x_{2 \text{ нач}} = m_1 x_{1 \text{ кон}} + m_2 x_{2 \text{ кон}},$$

$$\text{или } m_1 b + m_2 (-4) = m_1 (b - l) + m_2 (-l); \quad m_1 b - m_2 \cdot 4 = m_1 b - m_1 l - m_2 l;$$

$$-2000 \cdot 4 = -2000l - 2000l; \quad l = (4 \cdot 2000)/(2000 + 2000) = 0,36 \text{ м}.$$

Ответ. $l = 0,36 \text{ м}$.

1.14. РАБОТА СИЛЫ

Работа постоянной силы

Вычислим работу силы, постоянной по модулю и направлению (рис. 1.54, а). Предположим, что точка M перемещается в точку M_1 . Вектор силы $\vec{F}$ с вектором перемещения составляет угол α . В этом случае работу выполняет только та составляющая силы, которая совпадает с направлением вектора перемещения $\vec{U}$:

$$A = FU \cos \alpha = FU \cos (\vec{F}, \vec{U}).$$

Из векторной алгебры известно, что скалярное произведение двух векторов

$$\vec{F} \cdot \vec{U} = FU \cos (\vec{F}, \vec{U}).$$

Следовательно, работа постоянной по модулю и направлению силы на прямолинейном перемещении определяется скалярным произведением вектора силы на вектор перемещения ее точки приложения:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{U}.$$

Рассмотрим частные случаи определения работы постоянной силы.

1. Сила $\vec{F}$ действует на тело в направлении вектора перемещения $\vec{U}$:

$$A = FU.$$

2. Сила $\vec{F}$ направлена перпендикулярно вектору перемещения $\vec{U}$:

$$A = 0.$$

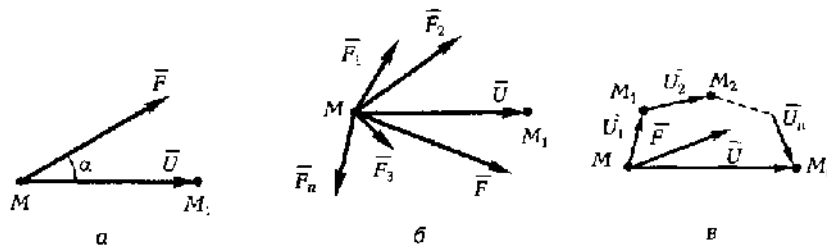


Рис. 1.54

3. Сила $\vec{F}$ направлена в сторону, противоположную вектору перемещения $\vec{U}$:

$$A = -FU.$$

Теорема 1. Работа равнодействующей силы на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих силы на том же перемещении.

Положим, что на точку M действуют постоянные по модулю и направлению силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 1.54, б). Равнодействующая этих сил $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$. Если точка получает перемещение $\vec{U}$, то работа силы $\vec{F}$ на этом перемещении будет равна

$$A = \vec{F} \cdot \vec{U} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) \cdot \vec{U} = \vec{F}_1 \cdot \vec{U} + \vec{F}_2 \cdot \vec{U} + \dots + \vec{F}_n \cdot \vec{U}.$$

Полученная сумма представляет собой сумму работ отдельных сил на перемещении $\vec{U}$. Таким образом, имеем

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

Теорема 2. Работа силы на результирующем перемещении равна алгебраической сумме работ этой силы на составляющих перемещениях.

Положим, что точка приложения постоянной силы $\vec{F}$ получает совокупность последовательных перемещений $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots, \vec{U}_n$ (рис. 1.54, в). Результирующее перемещение точки M

$$\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \dots + \vec{U}_n.$$

Определим работу силы $\vec{F}$ на этом перемещении

$$A = \vec{F} \cdot \vec{U} = \vec{F} \cdot (\vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \dots + \vec{U}_n) = \vec{F} \cdot \vec{U}_1 + \vec{F} \cdot \vec{U}_2 + \dots + \vec{F} \cdot \vec{U}_n.$$

Полученная сумма представляет собой сумму работ силы $\vec{F}$ на составляющих перемещениях. Таким образом, имеем

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

Напомним, что единицей измерения работы в системе СИ является джоуль ($1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$).

Работа силы тяжести не зависит от вида траектории, а определяется только расстоянием по вертикали между начальной и конечной точками перемещения (перепадом высот H): если точка перемещается сверху вниз, то работа силы тяжести положительная:

$$A = mgH,$$

если точка перемещается снизу вверх, то работа силы тяжести отрицательная:

$$A = -mgH.$$

Из этого следует важный вывод:

| работа силы тяжести на замкнутом пути равна нулю.

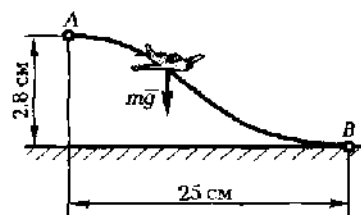


Рис. 1.55

Пример 1.16

Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить работу силы тяжести при снижении планера массой 1 200 кг из точки A в точку B (рис. 1.55).

Решение.

На планер, который мы принимаем за материальную точку, действует только сила тяжести. Работа силы тяжести при перемещении ее точки приложения сверху вниз определяется так:

$$A = mgH = 1\,200 \cdot 9,8 \cdot 2\,800 = 32\,828\,000 \text{ Н} \cdot \text{м} = 32,82 \text{ МН} \cdot \text{м}.$$

Элементарная работа

Пусть точка, к которой приложена переменная по направлению и модулю сила $\vec{F}$, перемещается по криволинейной траектории из M_1 в M_2 . Разобьем траекторию на элементарные участки ΔS_i , в пределах которых можно считать, что сила $\vec{F}_i$ остается постоянной. Вычислим элементарную работу на i -м участке:

$$\delta A = F_i \Delta S_i \cos \alpha_i,$$

где α_i — угол между касательной к траектории в данной точке и силой $\vec{F}_i$.

Фактически это зависимость для определения работы постоянной силы на элементарном перемещении. Работа силы при перемещении точки ее приложения из M_1 в M_2 определяется суммой элементарных работ:

$$A = \sum \delta A.$$

Следует заметить, что $\delta A \neq dA$, так как в общем случае элементарная работа не является дифференциалом функции.

Переходя к пределу при условии, что число участков n неограниченно возрастает, а ΔS_i неограниченно убывает, получим

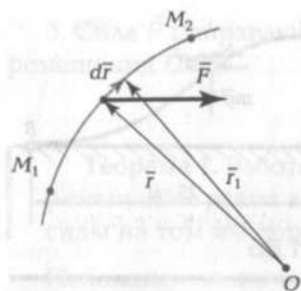


Рис. 1.56

выражение для определения работы при перемещении точки из M_1 в M_2 :

$$A_{1,2} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n F_i \Delta S_i \cos \alpha_i.$$

Такой предел называется криволинейным интегралом первого рода по дуге M_1M_2 и обозначается

$$A_{1,2} = \int_{M_1M_2} F \cos \alpha \, ds.$$

В то же время элементарную работу на элементарном перемещении можно выразить как скалярное произведение двух векторов (вектора силы $\vec{F}$ и вектора перемещения $d\vec{r}$) (рис. 1.56):

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

что позволит вычислить элементарную работу через проекции этих векторов:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Работа силы на конечном пути

Пусть на материальную точку действуют силы, которые заменим равнодействующей силой $\vec{F}$, переменной по направлению и модулю. Поскольку элементарная работа может быть выражена через их проекции на оси координат $\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz$, то работа на конечном перемещении точки из положения M_1 в M_2 определится криволинейным интегралом, взятым вдоль дуги M_1M_2 :

$$A_{1,2} = \int_{M_1M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz),$$

или

$$A_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt.$$

Итак, из полученной зависимости для работы силы на конечном пути видно, что $F_x \dot{x} dt$ — это работа составляющей силы, а следова-

работа равнодействующей сил, приложенных к материальной точке на некотором перемещении, равна сумме работ составляющих сил на том же перемещении:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

Работа сил, приложенных к вращающемуся твердому телу

Твердое тело представляет собой механическую систему, расстояния между точками которой остаются неизменными. Положим, что к твердому телу (рис. 1.57), вращающемуся вокруг неподвижной оси, приложены внешние силы $\vec{F}_1^E, \vec{F}_2^E, \dots, \vec{F}_n^E$, в результате действия которых в опорах A и B возникают реакции связей (их проекции показаны на рисунке). Необходимо определить работу сил, в результате действия которых тело вращается. Помимо внешних существуют и внутренние силы и моменты, но для абсолютно твердого тела работа внутренних силовых факторов равна нулю. Вычислим элементарную работу отдельной силы $\vec{F}_i^E$ на элементарном перемещении ее точки приложения dS_i . Траектория точки D_i — окружность с радиусом $r_i = D_iO$. При элементарном перемещении тела угол его поворота получает приращение $d\phi$, а дуговая координата точки D_i — приращение $dS_i = r_i d\phi$. Вычислим элементарную работу силы $\vec{F}_i^E$, предварительно разложив ее на три составляющие по естественным осям траектории точки D_i . Работа сил $\vec{F}_{in}^E$ и $\vec{F}_{ib}^E$, перпендикулярных вектору скорости точки D_i , равна нулю, поэтому элементарная работа силы $\vec{F}_i^E$ будет определяться только ее тангенциальной составляющей

$$\delta A_i^E = F_{it}^E dS_i = F_{it}^E r_i d\phi = M_{iz}^E d\phi.$$

Элементарная работа всех внешних сил, приложенных к твердому телу:

$$\delta A = \sum \delta A_i^E = \sum M_{iz}^E d\phi = d\phi \sum M_{iz}^E,$$

где $\sum M_{iz}^E = M_z^E$ — главный момент внешних сил относительно оси вращения Oz . Здесь следует отметить,

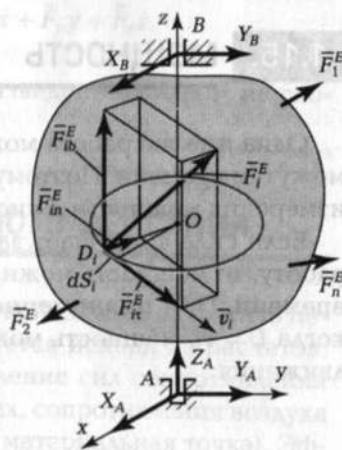


Рис. 1.57

что реакции связей не создают моментов относительно оси Oz , так как пересекают эту ось. Таким образом, имеем

$$\delta A = \sum \delta A_i^E = M_z^E d\varphi,$$

т.е.

элементарная работа сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна произведению главного момента внешних сил относительно оси вращения на приращение угла поворота.

Если при вращении тела угол поворота изменяется от φ_1 до φ_2 , то сумма работ сил на этом конечном перемещении будет

$$\sum A_i = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z^E d\varphi.$$

Если главный момент внешних сил относительно оси Oz постоянный, то

$$\sum A_i = M_z^E \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = M_z^E (\varphi_2 - \varphi_1).$$

В этом случае

сумма работ на конечном угловом перемещении равна произведению главного момента внешних сил относительно оси вращения на конечное изменение угла поворота тела.

1.15. МОЩНОСТЬ

Одна и та же работа может быть выполнена за различные промежутки времени. Поэтому вводят понятие «мощность»; единицей измерения мощности в системе СИ является ватт (1 Вт = 1 Дж/с).

Если сила совершает за равные промежутки времени равную работу, то мощность можно определить как отношение работы ко времени. При **равномерном прямолинейном движении точки**, когда $U = v$, мощность можно представить через силу и скорость движения:

$$N = Fv \cos \alpha.$$

Для **равномерного вращательного движения тела** с постоянной угловой скоростью ω справедлива следующая формула:

$$N = M_{\text{кр}} \omega = M_{\text{кр}} \frac{n}{30},$$

где $M_{\text{кр}}$ — крутящий момент относительно оси вращения; n — частота вращения, мин^{-1} .

Рассмотрим общий случай, когда работа совершается **неравномерно**. Вычислим работу от некоторой фиксированной точки M_1 до текущего положения M :

$$A = \int_{M_1 M} (F_x dx + F_y dy + F_z dz), \quad \text{или} \quad A = \int_0^t (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt.$$

Мощность N силы $\vec{F}$ определяется как скорость изменения работы:

$$N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt},$$

где A рассматривается как функция времени t . В этом случае полный дифференциал работы $dA = (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt$, выраженный как функция времени t , равен элементарной работе $dA(t) = \delta A$ или, как ранее было сказано, $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Тогда

$$dA(t) = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Таким образом,

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F}_x \dot{x} + \vec{F}_y \dot{y} + \vec{F}_z \dot{z},$$

т.е. мощность N равна скалярному произведению силы $\vec{F}$ на скорость точки приложения силы.

1.16. КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ

Чтобы произвести полезную работу, необходимо затратить несколько большую работу, чем это требуется исходя из расчетов, так как часть ее расходуется на преодоление сил сопротивления (сил трения в зубчатых передачах и опорах, сопротивления воздуха и другой среды, в которой перемещается материальная точка). Эффективность работы какой-либо установки или машины оценивается коэффициентом полезного действия η .

Коэффициентом полезного действия (КПД) машины называют отношение полезной работы к полной затраченной работе:

$$\eta = \frac{A_{\text{полез}}}{A_{\text{полн}}} < 1.$$

1.17. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

При поступательном движении твердого тела мерой инерции является его масса, при вращательном движении — момент инерции. Момент инерции можно рассматривать относительно плоскости, оси и полюса.

Моментом инерции тела J относительно плоскости, оси или полюса называется сумма произведений элементарных масс тела на квадраты их расстояний до плоскости, оси или полюса соответственно (рис. 1.58):

$$J = \int r^2 dm = \sum r_i^2 m_i.$$

Согласно этому определению выразим момент инерции относительно плоскости

$$J_{yOz} = \sum m_i x_i^2; \quad J_{xOy} = \sum m_i z_i^2; \quad J_{zOx} = \sum m_i y_i^2;$$

относительно координатных осей

$$J_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad J_y = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2); \quad J_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2);$$

относительно полюса (полярный момент)

$$J_O = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

Между моментами инерции существуют следующие соотношения:

$$J_O = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = J_{xOy} + J_{yOz} + J_{zOx};$$

$$J_x + J_y + J_z = 2 \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2J_O.$$

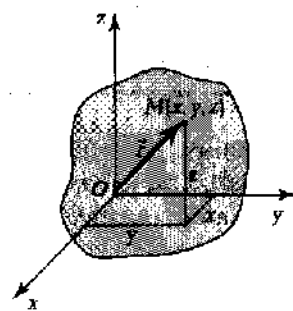


Рис. 1.58

Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей

Момент инерции относительно любой оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной ей и проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между этими осями.

Для доказательства теоремы проведем через центр масс тела C три взаимно-перпендикулярные оси (рис. 1.59, а). Необходимо найти момент инерции тела относительно оси, проходящей параллельно оси C на расстоянии d . Выразим для произвольной точки A_i моменты инерции относительно осей Oz_1 и Cz :

$$J_{iz1} = m_i h_i^2 \text{ и } J_{izC} = m_i r_i^2.$$

Из рис. 1.59, б видно, что

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2, \text{ а } h_i^2 = (y_i - d)^2 + x_i^2 = r_i^2 - 2y_i d + d^2.$$

Теперь определим момент инерции тела относительно оси Oz_1 :

$$J_{z1} = \sum m_i r_i^2 - 2 \sum m_i y_i d + \sum m_i d^2,$$

или

$$J_{z1} = J_{zC} - 2d \sum m_i y_i + d^2 \sum m_i.$$

Так как $\sum m_i = m$ (массе всего тела) и $\sum m_i y_i = m y_C$ и, учитывая, что $y_C = 0$, получим

$$J_{z1} = J_{zC} + m d^2.$$

что и требовалось доказать.

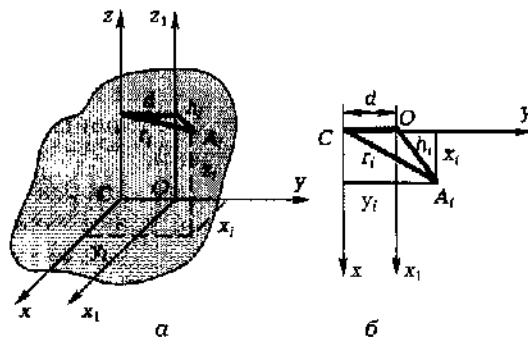


Рис. 1.59

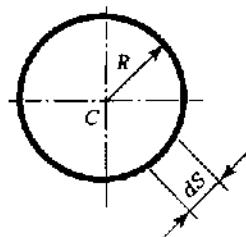


Рис. 1.60

Пример 1.17.

Вычислить полярный момент инерции обода относительно центра тяжести, если известны радиус обода R , его толщина h и плотность ρ .

Решение.

Поскольку ободом называется тело вращения малой толщины, у которого масса равномерно распределена по окружности, то можно, выделив на окружности (рис. 1.60) элементарную массу $m_i = \rho h dS$, вычислить момент инерции обода относительно центра тяжести:

$$J_{xC} = \int_0^{2\pi R} \rho h dS R^2 = \rho h R^2 2\pi R = m R^2.$$

О т в е т. Момент инерции обода относительно его центра тяжести равен произведению массы обода на квадрат его радиуса.

1.18. ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Импульс силы

Если сила в течение промежутка времени $t_2 - t_1$ постоянна по модулю и по направлению, то она сообщает материальной точке импульс

$$\vec{S} = \vec{F}(t_2 - t_1).$$

Направление этого вектора совпадает с направлением действующей силы, а его модуль равен

$$S = F(t_2 - t_1).$$

Импульс силы характеризует передачу механического движения материальной точке со стороны действующих на нее тел за данный промежуток времени.

Импульс переменной силы, которая меняет свое направление и величину, т. е. $\vec{F} = \vec{F}(t)$, определяют таким образом:

$$\vec{S} = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum \Delta \vec{S}_k = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum \vec{F} \Delta t_k \text{ или } \vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt.$$

Проекции этого вектора на оси координат будут равны

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt; \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt; \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt.$$

Модуль импульса

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2},$$

а его направление определится направляющими косинусами:

$$\cos(\vec{S}, \vec{i}) = S_x/S; \quad \cos(\vec{S}, \vec{j}) = S_y/S; \quad \cos(\vec{S}, \vec{k}) = S_z/S.$$

Если на точку действует несколько сил, то под $\vec{F}$ следует понимать равнодействующую силу и ее проекции на оси координат F_x, F_y, F_z , а импульс будет представлять собой импульс равнодействующей силы.

Теорема об изменении количества движения материальной точки

Количеством движения материальной точки называется вектор, имеющий направление скорости и модуль, равный произведению массы m на скорость ее движения v . Количество движения точки является мерой ее механического движения.

Понятие «количество движения» было введено в механику Декартом, а положено в основу механики Ньютоном.

Пусть на материальную точку действует сила $\vec{F}$. Запишем основное уравнение динамики

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Преобразуем это равенство следующим образом, подставив вместо $\vec{a} = d\vec{v}/dt$:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}.$$

Полученная зависимость выражает теорему об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме. Формулируется эта теорема следующим образом:

производная по времени от вектора количества движения материальной точки равна геометрической сумме сил, приложенных к этой точке.

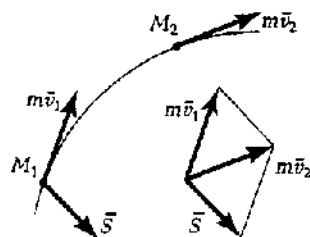


Рис. 1.61

Установим зависимость между изменением количества движения и импульсами сил, действующих на материальную точку. Для этого проинтегрируем обе части равенства $d(m\vec{v}) = \vec{F} dt$:

$$\int_{t_1}^{t_2} d(m\vec{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt.$$

Так как правая часть этого равенства представляет собой импульс $\vec{S}$ силы $\vec{F}$ за промежуток времени $t_2 - t_1$, то получим

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{S}, \text{ или } m\vec{v}_2 = \vec{S} + m\vec{v}_1,$$

т. е. вектор $m\vec{v}_2$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $m\vec{v}_1$ и $\vec{S}$ (рис. 1.61).

Если на материальную точку действует не одна сила, а несколько, то $\vec{S} = \sum \vec{S}_i$, и в этом случае изменение количества движения материальной точки запишется следующим образом:

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \sum \vec{S}_i.$$

Полученное уравнение выражает теорему об изменении количества движения материальной точки в конечной форме:

изменение количества движения за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов, приложенных к точке за тот же промежуток времени.

Теорема об изменении количества движения механической системы

Количеством движения механической системы называется вектор, равный геометрической сумме количеств движения всех материальных точек этой системы. Если количество движения материальной точки $\vec{K}_i = m_i \vec{v}_i$, то вектор количества движения всей механической системы определится так:

$$\vec{K} = \sum m_i \vec{v}_i.$$

Преобразуем полученное равенство

$$\bar{K} = \sum m_i \bar{v}_i = \sum (m_i d\bar{r}_i/dt) = d(\sum m_i \bar{r}_i)/dt.$$

Так как $\sum m_i \bar{r}_i = m\bar{r}_C$, то $\bar{K} = m d\bar{r}_C/dt$ или

$$\bar{K} = m\bar{v}_C,$$

т. е. вектор количества движения механической системы равен произведению массы системы m на скорость движения ее центра масс и имеет направление этой скорости.

Проецируя вектор $\bar{K} = m\bar{v}_C$ на оси координат, получим

$$K_x = \sum m_i v_{ix} = mv_{Cx}; \quad K_y = \sum m_i v_{iy} = mv_{Cy}; \quad K_z = \sum m_i v_{iz} = mv_{Cz}.$$

Найдем производные от проекций количества движения:

$$dK_x/dt = m dv_{Cx}/dt = m\ddot{x}_C;$$

$$dK_y/dt = m dv_{Cy}/dt = m\ddot{y}_C;$$

$$dK_z/dt = m dv_{Cz}/dt = m\ddot{z}_C.$$

В соответствии с теоремой о движении центра масс механической системы

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{ix}^E; \quad m\ddot{y}_C = \sum F_{iy}^E; \quad m\ddot{z}_C = \sum F_{iz}^E.$$

Следовательно,

$$dK_x/dt = \sum F_{ix}^E; \quad dK_y/dt = \sum F_{iy}^E; \quad dK_z/dt = \sum F_{iz}^E.$$

Таким образом, мы доказали теорему об изменении количества движения механической системы, выраженную в дифференциальной форме:

производная по времени от проекции количества движения механической системы на любую ось равна проекции главного вектора (на ту же ось) внешних сил, действующих на эту систему.

Обозначив главный вектор внешних сил $\bar{R}^E = \sum \bar{F}_i^E$, запишем теорему об изменении количества движения механической системы в векторном виде:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{R}^E,$$

которая будет формулироваться следующим образом:

производная по времени от вектора количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил, действующих на эту систему.

Из этой теоремы следует, что изменение количества движения системы вызывается только внешними силами.

Следствие из теоремы: если главный вектор внешних сил все время равен нулю, то количество движения системы остается постоянным:

$$\bar{R}^E = 0, d\bar{K}/dt = 0, \bar{K} = \text{const.}$$

Это положение называют **законом сохранения количества движения механической системы**. Например, на Солнечную систему не действуют внешние силы, поэтому центр масс Солнечной системы совершает равномерное прямолинейное движение.

Найдем зависимость между изменением количества движения системы и импульсами действующих на эту систему сил. Для этого воспользуемся теоремой об изменении количества движения применительно к материальным точкам системы. На каждую точку M_i системы действуют как внешние $\bar{F}_i^E$, так и внутренние $\bar{F}_i^J$ силы; в этом случае изменение количества движения материальной точки системы будет равно

$$(m_i \bar{v}_i)_2 - (m_i \bar{v}_i)_1 = \bar{S}_i^E + \bar{S}_i^J,$$

где $\bar{S}_i^E$ и $\bar{S}_i^J$ — соответственно импульсы внешних и внутренних сил, действующих на материальную точку в промежутке времени $t_2 - t_1$. Суммируя правые и левые части k равенств, получим

$$\sum (m_i \bar{v}_i)_2 - \sum (m_i \bar{v}_i)_1 = \sum \bar{S}_i^E + \sum \bar{S}_i^J.$$

Так как главный вектор внутренних сил $\bar{R}^J = 0$, то и геометрическая сумма импульсов внутренних сил равна нулю, т. е. $\sum \bar{S}_i^J = 0$. Отсюда

$$\bar{K}_2 - \bar{K}_1 = \sum \bar{S}_i^E.$$

Полученное уравнение выражает теорему об изменении количества движения механической системы в конечной форме:

изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов внешних сил, приложенных к системе, за тот же промежуток времени.

Пример 1.18

Определить количество движения диска массой m и радиусом R , вращающегося относительно неподвижной оси (рис. 1.62) с угловой скоростью ω .

Решение.

В точке C находится МЦС диска и одновременно его центр масс, поэтому скорость центра масс равна нулю, а следовательно, количество движения диска $\vec{K} = m\vec{v}_C$ также будет равно нулю.

Отв е т. Количество движения диска, вращающегося относительно оси, проходящей через его центр масс, равно нулю.

Пример 1.19

Вокруг неподвижной оси O (рис. 1.63) равномерно вращается стержень (весом G_1 и длиной l) с угловой скоростью ω .

На конце стержня закреплен шарик весом G_2 . Вычислить количество движения системы, если $G_1 = 4G_2 = 4G$.

Решение.

Задача имеет два варианта решения: 1) с использованием зависимости $\vec{K} = \sum \vec{K}_i$; 2) с применением формулы $\vec{K} = m\vec{v}_C$.

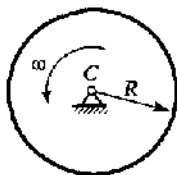


Рис. 1.62

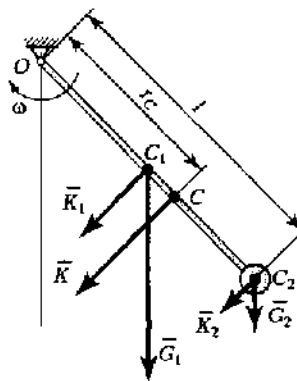


Рис. 1.63

I вариант решения.

1. Определяем количество движения стержня

$$\bar{K}_1 = m_1 \bar{v}_{C1}; K_1 = (4G/g) \omega (l/2) = 2(G/g) \omega l.$$

2. Определяем количество движения шарика.

Принимая шарик за материальную точку, вычисляем его количество движения

$$\bar{K}_2 = m_2 \bar{v}; K_2 = (G/g) v_2 = (G/g) \omega l.$$

3. Вычисляем количество движения всей системы

$$\bar{K} = \bar{K}_1 + \bar{K}_2,$$

а так как векторы $\bar{K}_1$ и $\bar{K}_2$ параллельны, то

$$K = K_1 + K_2 = 2(G/g) \omega l + (G/g) \omega l = 3(G/g) \omega l.$$

II вариант решения.

1. Определяем положение центра масс системы

$$r_c = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{G_1 (l/2) + G_2 l}{G_1 + G_2} = \frac{4G(l/2) + Gl}{4G + G} = 0,6l.$$

2. Вычисляем количество движения всей системы

$$\bar{K} = m \bar{v}_c; K = \frac{G_1 + G_2}{g} \omega \cdot 0,6l = 3(G/g) \omega l.$$

1.19. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Положим, что движение точки A происходит под действием силы $\bar{F}$ (рис. 1.64, а). Соединим произвольно выбранный центр O с этой точкой радиусом-вектором $\bar{r}$. Определим момент силы $\bar{F}$ относительно центра O

$$\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F}$$

и вычислим **момент количества движения** этой точки относительно того же центра

$$\bar{L}_O = \bar{r} \times m \bar{v}.$$

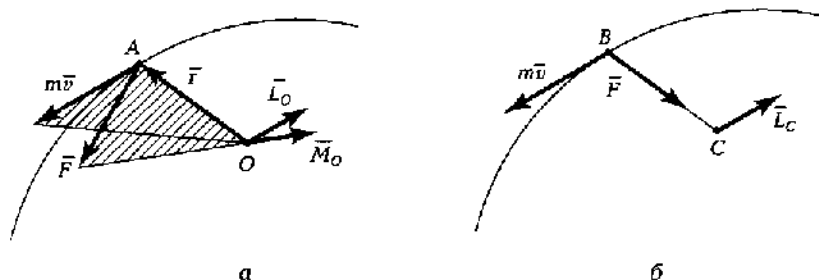


Рис. 1.64

Установим зависимость между векторами $\vec{M}_O$ и $\vec{L}_O$. Для этого найдем производную по времени от момента количества движения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}_O &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt} m\vec{v} = \\ &= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = 0 + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O. \end{aligned}$$

Если на материальную точку действует несколько сил, то $\vec{M}_O$ следует рассматривать как момент их равнодействующей.

Таким образом,

$$d\vec{L}_O/dt = \sum \vec{M}_{iO},$$

что выражает теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра:

производная по времени от вектора момента количества движения материальной точки относительно некоторого центра равна геометрической сумме моментов сил, действующих на точку, относительно того же центра.

Последнюю зависимость можно записать в проекциях на оси координат:

$$dL_x/dt = \sum M_{ix}; \quad dL_y/dt = \sum M_{iy}; \quad dL_z/dt = \sum M_{iz}.$$

Эти равенства представляют собой теорему об изменении момента количества движения точки относительно оси:

производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторой оси равна алгебраической сумме моментов сил, действующих на точку, относительно этой же оси.

Следствия из теоремы. 1. Если линия действия равнодействующей сил, приложенных к материальной точке, все время проходит через некоторый центр, то момент количества движения материальной точки относительно этого центра остается постоянным.

В этом случае сила $\vec{F}$ всегда направлена по радиусу-вектору точки B (рис. 1.64, б), следовательно, векторное произведение $\vec{r} \times \vec{F}$ равно нулю, т. е. момент силы $\vec{F}$ относительно точки C равен нулю, а следовательно, $\vec{L}_C = \text{const.}$

2. Если момент равнодействующей приложенных к материальной точке сил относительно некоторой оси все время равен нулю, то момент количества движения материальной точки относительно этой оси остается постоянным.

Например, если $\sum M_{iy} = 0$, то, следовательно, $dL_y/dt = 0$ и $L_y = \text{const.}$

1.20. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Кинетическим моментом количества движения механической системы относительно данного центра называют вектор, равный геометрической сумме моментов количества движения всех материальных точек системы относительно этого центра.

Кинетический момент количества движения механической системы называют также **главным моментом количества движения механической системы**. Например, относительно некоторого центра B он будет вычисляться так:

$$\vec{L}_B = \sum \vec{L}_{iB} = \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i),$$

где $\vec{r}_i$ — радиус-вектор i -й материальной точки относительно центра B ; $m_i \vec{v}_i$ — количество движения материальной точки.

Кинетический момент системы относительно оси равен алгебраической сумме моментов количества движения материальных точек, входящих в данную систему, относительно той же оси.

Например, относительно оси Oz

$$L_z = \sum L_{iz}.$$

Рассмотрим механическую систему, состоящую из k материальных точек. Материальные точки находятся в движении под действием внешних $\vec{F}_i^E$ и внутренних $\vec{F}_i^J$ сил. Для каждой материальной точки относительно выбранного неподвижного центра O на основании теоремы об изменении момента количества движения запишем

$$\frac{d}{dt} \bar{L}_{iO} = \bar{M}_{iO}^E + \bar{M}_{iO}^J.$$

Получим k таких уравнений; просуммируем их:

$$\sum \frac{d}{dt} \bar{L}_{iO} = \sum \bar{M}_{iO}^E + \sum \bar{M}_{iO}^J.$$

Как указывалось ранее (см. подразд. 1.12), главный момент всех внутренних сил относительно любого центра равен нулю, т. е. $\sum \bar{M}_{iO}^J = 0$. Тогда

$$\sum \frac{d}{dt} \bar{L}_{iO} = \sum \bar{M}_{iO}^E \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \sum \bar{L}_{iO} = \sum \bar{M}_{iO}^E.$$

В соответствии с определением, подставив вместо $\sum \bar{L}_{iO}$ кинетический момент системы $\bar{L}_O$, получим

$$\frac{d}{dt} \bar{L}_O = \sum \bar{M}_{iO}^E = \bar{M}_O^E.$$

Это равенство представляет собой теорему об изменении кинетического момента механической системы:

производная по времени от вектора кинетического момента механической системы относительно некоторого центра равна главному моменту внешних сил, действующих на эту систему, относительно того же центра.

Векторному равенству соответствуют три равенства в проекциях на оси координат:

$$dL_x/dt = M_x^E; \quad dL_y/dt = M_y^E; \quad dL_z/dt = M_z^E,$$

где L_x, L_y, L_z — кинетические моменты механической системы относительно осей координат; M_x^E, M_y^E, M_z^E — главные моменты внешних сил, действующих на систему, относительно тех же осей.

Следствия из теоремы. 1. Если главный момент внешних сил относительно некоторого центра все время равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этого центра остается постоянным:

$$d\bar{L}_O/dt = 0, \text{ следовательно, } \bar{L}_O = \text{const.}$$

Это положение называется **законом сохранения кинетического момента механической системы относительно центра**.

2. Если главный момент внешних сил относительно некоторой оси все время равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этой оси остается постоянным.

Например, $M_x = 0$, тогда $dL_x/dt = 0$ и, следовательно, $L_x = \text{const.}$

1.21. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Из курса физики известно, что кинетическая энергия материальной точки массой m , движущейся со скоростью $\bar{v}$, равна половине произведения массы этой точки на квадрат скорости ее движения:

$$T = mv^2/2.$$

Рассмотрим движение материальной точки M под действием приложенной к ней системы сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ (рис. 1.65). Выберем положительное направление отсчета и запишем основное уравнение динамики

$$m\bar{a} = \bar{F}.$$

Здесь сила $\bar{F}$ является равнодействующей сходящейся системы сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$. Спроецируем это векторное равенство на ось τ :

$$ma_\tau = F_\tau$$

(о естественном способе задания траектории движения точки см. подразд. 1.7 и 1.11).

$$\text{Учитывая, что } a_\tau = \frac{dv}{dt} =$$

$$= \frac{dv}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{dv}{dS} v, \text{ подставим полу-}$$

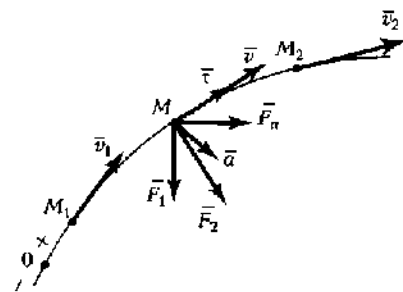


Рис. 1.65

ченное значение касательного ускорения в уравнение движения вдоль орта $\vec{\tau}$:

$$mvdv/dS = F_{\tau} \text{ или } mvdv = F_{\tau}dS, \\ \text{или } d(mv^2/2) = FdS\cos(\vec{F}, \vec{\tau}).$$

Левая часть полученного равенства представляет собой дифференциал кинетической энергии точки, а правая часть — **элементарную работу** равнодействующей на перемещении dS (работу совершает только касательная составляющая равнодействующей):

$$d(mv^2/2) = \delta A.$$

Поскольку $F_{\tau} = \sum F_{\tau i}$, а перемещение точки приложения у всех сил одинаково, то $\delta A = \sum \delta A_i$, следовательно, можно записать дифференциал кинетической энергии по-другому:

$$d(mv^2/2) = \sum \delta A_i,$$

т. е. дифференциал кинетической энергии точки равен сумме элементарных работ сил, приложенных к точке.

При перемещении точки из положения M_1 в M_2 скорость точки будет меняться от $\vec{v}_1$ до $\vec{v}_2$; в этом случае изменится и кинетическая энергия

$$m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \sum \int_{M_1}^{M_2} F_i dS \cos(\vec{F}_i, \vec{\tau}),$$

откуда

$$mv_2^2/2 - mv_1^2/2 = \sum \delta A_i.$$

Полученное уравнение представляет собой теорему об изменении кинетической энергии материальной точки:

изменение кинетической энергии материальной точки на некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на эту точку сил на том же перемещении.

Если сумма работ сил положительна, то $v_2 > v_1$, т. е. кинетическая энергия возрастает. Если же сумма работ отрицательна, то кинетическая энергия убывает.

1.22.

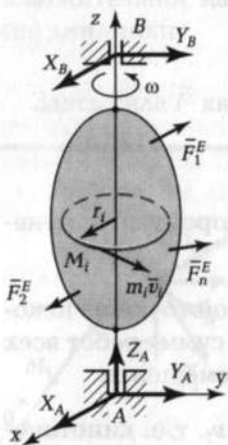
жение твердого тела:

$$m\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^k F_{ix}^E; \quad m\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^k F_{iy}^E; \quad m\ddot{z}_C = \sum_{i=1}^k F_{iz}^E.$$

оси координат.

1.23.

ной оси под действием внешних сил $\vec{F}^E$ (рис.



$$L_z = \sum m_i v_i r_i = \sum m_i \omega v_i r_i = \sum m_i \omega r_i^2 = \omega \sum m_i r_i^2 = \omega J_z.$$

Таким образом, мы получили, что кинети-

$$L_z = J_z \omega.$$

Рис. 1.66

В соответствии с теоремой об изменении кинетического момента относительно оси запишем производную по времени от кинетического момента относительно оси Az

$$dL_z/dt = \sum M_{iz}^E \text{ или } d(J_z\omega)/dt = \sum M_{iz}^E,$$

откуда

$$J_z d\omega/dt = \sum M_{iz}^E \text{ или } J_z \epsilon = \sum M_{iz}^E.$$

Учитывая, что угловое ускорение ϵ представляет собой вторую производную от угла поворота тела ϕ , полученную зависимость можно записать в следующем виде:

$$J_z \ddot{\phi} = \sum M_{iz}^E.$$

В результате мы получили дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Следует иметь в виду, что его правая часть — это главный момент внешних **заданных** сил $\bar{F}_i^E$, а момент реакции связей относительно оси Az равен нулю, так как реакции пересекают ось Az :

$$J_z \ddot{\phi} = M_z^E.$$

Если главный момент внешних сил относительно оси вращения равен нулю, **кинетический момент системы остается постоянным**:

$$J_z \omega = \text{const.}$$

В этом случае, если момент инерции системы будет неизменным, система будет вращаться с постоянной угловой скоростью. Если же изменится момент инерции, то угловая скорость тоже изменится:

$$J_{z1}\omega_1 = J_{z2}\omega_2.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется абсолютно твердым телом?
2. Какие системы сил называются эквивалентными?
3. В чем состоит принцип освобожденности твердого тела от связей?
4. Чем отличаются активные силы от пассивных?

5. Что называется плоской и пространственной системой сил?
6. Чем отличаются сходящиеся силы от произвольно расположенных в пространстве?
7. Как определяется момент силы относительно точки?
8. Запишите основные уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил.
9. Что такое главный вектор сил и чему он равен? Зависит ли главный вектор сил от выбора центра приведения?
10. Перечислите способы определения положения центра тяжести твердого тела.
11. Имеет ли материальная точка ускорение при равномерном движении по криволинейной траектории?
12. Могут ли точки тела, движущегося поступательно, иметь криволинейные траектории?
13. Что такое мгновенный центр скоростей плоской фигуры?
14. Если пассажир идет в салоне самолета в направлении полета, его скорость по отношению к Земле будет больше или меньше, чем скорость самолета?
15. Какое движение будет совершать тело при сложении двух вращательных движений, у которых угловые скорости одинаковые, а направления разные?
16. Запишите основной закон динамики.
17. Чему равна работа силы тяжести? Зависит ли она от вида траектории точки приложения силы?
18. Дайте определение коэффициента полезного действия. Для чего введено это понятие?
19. Как определить центр тяжести грузовика?
20. Определите количество движения колеса весом G и радиусом R , катящегося по прямолинейному рельсу без скольжения с угловой скоростью ω .
21. При каком расположении вектора количества движения материальной точки его момент относительно оси будет равен нулю?
22. При каких условиях кинетический момент механической системы относительно центра остается постоянным?
23. Почему для того чтобы остановиться, быстро вращающийся на коньках фигурист раскидывает в стороны руки?

Глава 2

ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В данной главе будем рассматривать тела, которые под действием внешних сил меняют свою форму и размеры, т. е. деформируются.

Деформации могут быть **упругими**, если тело после устранения нагрузки, т. е. внешних сил, восстанавливает свои размеры и форму. Если же после снятия нагрузки тело не восстанавливает прежней формы, то возникающие при этом деформации называются **остаточными**. Мы будем изучать только однородные изотропные тела, у которых по всем направлениям свойства одинаковые.

В сопротивлении материалов тела классифицируют следующим образом:

- **пластина** — тело, у которого длина и ширина намного больше толщины;
- **оболочка** — в отличие от пластины ограничена криволинейными поверхностями;
- **брус** — тело, у которого размеры поперечного сечения малы по сравнению с его длиной. Если линия, соединяющая центры тяжести отдельных поперечных сечений бруса, прямая, то такой брус называют **прямым**;
- **стержень** — брус, работающий на растяжение или сжатие;
- **балка** — брус, к которому силы приложены под углом. В этом случае брус под действием таких сил будет работать не только на сжатие (растяжение), но и на изгиб, т. е. будет изгибаться.

В зависимости от того, какие силы приложены к брусу, он будет по-разному деформироваться. Чтобы определить напряженное состояние, применяют **метод сечений**. Метод сечений позволяет

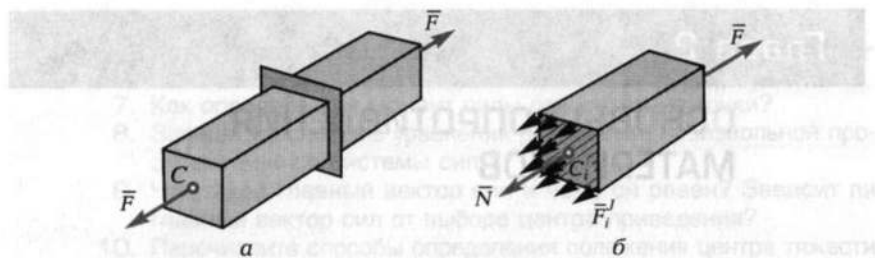


Рис. 2.1

выявить внутренние силы и заключается в том, что тело мысленно рассекают плоскостью на две части (рис. 2.1, а) и рассматривают равновесие одной из отсеченных частей. Считают, что внутренние силы распределены равномерно, их равнодействующая равна $\bar{N}$ (рис. 2.1, б). Составим уравнение равновесия сил, действующих на отсеченную часть бруса:

$$\sum \bar{F}_i^E + \sum \bar{F}_i^J = 0 \text{ или } F - N = 0.$$

Отсюда

$$N = F.$$

Величина σ , характеризующая интенсивность распределения внутренних сил по поперечному сечению, называется **напряжением**:

$$\sigma = N/S,$$

где S — площадь поперечного сечения. Напряжение согласно Международной системе единиц измеряется в паскалях (Па, или Н/м²), на практике чаще используют мегапаскали (МПа, или Н/мм²).

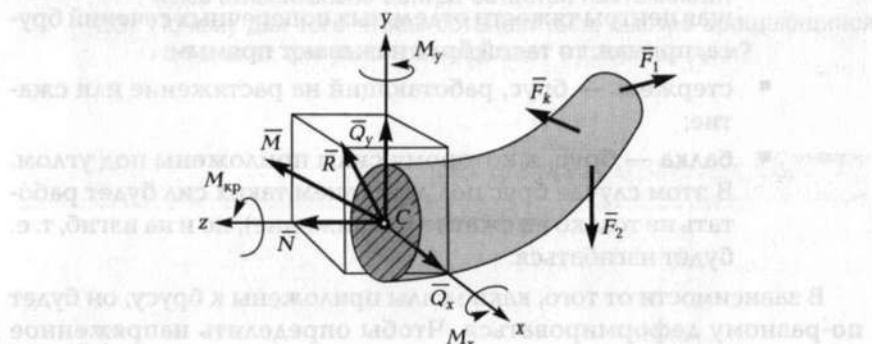


Рис. 2.2

В рассмотренном примере внутренние силы направлены по нормали к поперечному сечению, поэтому напряжение называется **нормальным**.

В общем случае нагружения тела (рис. 2.2) все внутренние силы можно привести к главному вектору $\bar{R}^J$ и главному моменту $\bar{M}^J$.

Выбираем систему координат так, чтобы ось z была направлена по нормали к сечению, а оси x и y расположим в его плоскости. Спроецировав главный вектор и главный момент внутренних сил, а также внешние силы, действующие на правую отсеченную часть, на координатные оси, и приравняв их сумму к нулю, получим шесть уравнений для определения внутренних силовых факторов. Составляющая внутренних сил по нормали к сечению $\bar{N}$ — нормальная сила; силы $\bar{Q}_x$ и $\bar{Q}_y$ являются составляющими поперечной силы $\bar{Q}$. Момент относительно оси z называют крутящим моментом ($M_{кр}$), а моменты M_x и M_y — изгибающими моментами относительно осей x и y . При заданных внешних силах все шесть внутренних силовых факторов могут быть определены из шести уравнений равновесия, составленных для отсеченной части бруса. Если в поперечном сечении возникает только внутренняя нормальная сила $\bar{N}$, а прочие внутренние силовые факторы обращаются в нуль, то имеет место растяжение или сжатие в зависимости от направления силы $\bar{N}$. Если в поперечном сечении возникает только момент $M_{кр}$, то брус в данном сечении работает только на кручение. В случае, когда внешние силы приложены к брусу таким образом, что в поперечных сечениях возникает только изгибающий момент M_x (или M_y), имеет место чистый изгиб в плоскости yz (или xz). Если в поперечном сечении наряду с изгибающим моментом, например M_x , возникает и поперечная сила Q_y , такой случай нагружения называется поперечным изгибом (в плоскости yz). Возможны и другие случаи, когда в поперечном сечении действуют различные силовые факторы; при этом брус испытывает сложное напряженное состояние. Помимо нормального напряжения в сечении будет возникать касательное напряжение τ в плоскости этого сечения.

2.2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Под растяжением понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса (стержня) возникают только нормальные силы, а все прочие внутренние силовые факторы (поперечные силы, крутящий момент и изгибающие моменты) равны

нулю. Сжатие отличается от растяжения только знаком силы $\bar{N}$: при растяжении нормальная сила $\bar{N}$ направлена от сечения (см. рис. 2.1), а при сжатии — к сечению. Поэтому при анализе внутренних сил сохраняется единство подхода к вопросам растяжения и сжатия. Исключение составят длинные тонкие стержни, для которых сжатие сопровождается изгибом (см. подразд. 2.12).

Закон Гука

Многочисленные наблюдения за поведением твердых тел показывают, что в подавляющем большинстве случаев перемещения в определенных пределах пропорциональны действующим силам. Впервые в 1676 г. Р. Гуком был сформулирован закон о том, что «какова сила, такова и деформация».

В современной трактовке закон Гука определяет *линейную зависимость между напряжением и деформацией*:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Здесь коэффициент пропорциональности E есть *модуль упругости первого рода*, ε — деформация, которую для однородного стержня можно определить как

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Величину ε иногда называют *относительным удлинением* стержня длиной l , удлинение которого под действием приложенной силы составило Δl .

Модуль упругости первого рода является физической константой материала; он определяется экспериментально. Для наиболее часто встречающихся материалов его значения приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1. Механические характеристики материалов [11]

Материал	Напряжение, Н/мм ²				$E, 10^5$ Н/мм	$\delta \%,$ $l = 5d$	μ
	$\sigma_{т.р}$	$\sigma_{т.с}$	$\sigma_{в.р}$	$\sigma_{в.с}$			
Сталь низкоуглеродистая	250	250	390	—	2,0	42	0,25...0,35
Сталь 30 незакаленная	330	330	530	—	2,0	28	

Окончание табл. 2.1

Материал	Напряжение, Н/мм ²				$E, 10^9$ Н/мм	$\delta \%,$ $l = 5d$	μ
	$\sigma_{\text{тр}}$	$\sigma_{\text{тл}}$	$\sigma_{\text{ар}}$	$\sigma_{\text{вс}}$			
Сталь 30 закаленная	1 030	90	1 100	—	2,0	11	0,25...0,35
Сталь 45 незакаленная	370	370	620	—	2,0	24	
Сталь 45 закаленная	1 040	970	1 080	—	2,0	13	
Сталь У8 незакаленная	250	430	630	—	2,0	25	
Сталь У8 закаленная	700	700	1 100	—	2,0	16	
Сталь 30ХГС закаленная	1 400	1 400	1 620	—	2,0	10	
Сталь 40ХНВ закаленная	1 720	2 100	2 050	—	2,0	10	
Чугун серый СЧ25	140	310	250	940	0,7	0,6	—
Титан техни- ческий	520	520	600	—	1,1	23	—
Медь отож- женная	55	55	220	—	1,1	46	0,34
Медь прутковая	250	250	320	—	1,1	15	
Латунь	330	330	450	—	1,2	17	—
Бронза	110	110	136	—	1,2	7,5	—
Алюминий	50	50	84	—	0,7	3	0,26...0,36
Дуралюмин	340	340	540	—	0,75	13	—
Текстолит	75	115	127	168	0,03	1,5	—

Удлинение стержня

Если в закон Гука вместо напряжения подставить $\sigma = N/S$, а вместо деформации $\epsilon = \Delta l/l$, то получим выражение для определения удлинения стержня, у которого на длине l внутренняя нормальная сила постоянная и поперечное сечение не изменяется:

$$\Delta l = \frac{Nl}{ES}.$$

При решении многих практических задач возникает необходимость наряду с удлинением, обусловленным напряжением σ , учитывать также удлинения, связанные с температурным воздействием.

В этом случае деформацию рассматривают как сумму силовой и температурной деформации:

$$\epsilon = \sigma/E + \alpha t,$$

где α — коэффициент температурного расширения материала. Для однородного стержня, нагруженного на концах и равномерно нагретого:

$$\Delta l = \frac{Nl}{ES} + \alpha lt.$$

Построение эпюр

График изменения нормальной силы, напряжений и перемещений стержня вдоль его оси называется **эпюрой** соответственно нормальных сил, напряжений и перемещений. Эпюры дают наглядное представление о законах изменения различных исследуемых величин. Построение эпюр рассмотрим на конкретном примере.

Пример 2.1

Для бруса, изображенного на рис. 2.3, а, построить эпюры внутренних сил, напряжений и перемещений по длине бруса.

Решение.

1. Выбираем начало отсчета в неподвижном сечении (точка O); положительное направление оси z направим по оси бруса, т. е. вниз.

2. Определим реакцию, составив одно уравнение равновесия:

$$\sum F_{iz} = 0; N_O - 3F + F = 0.$$

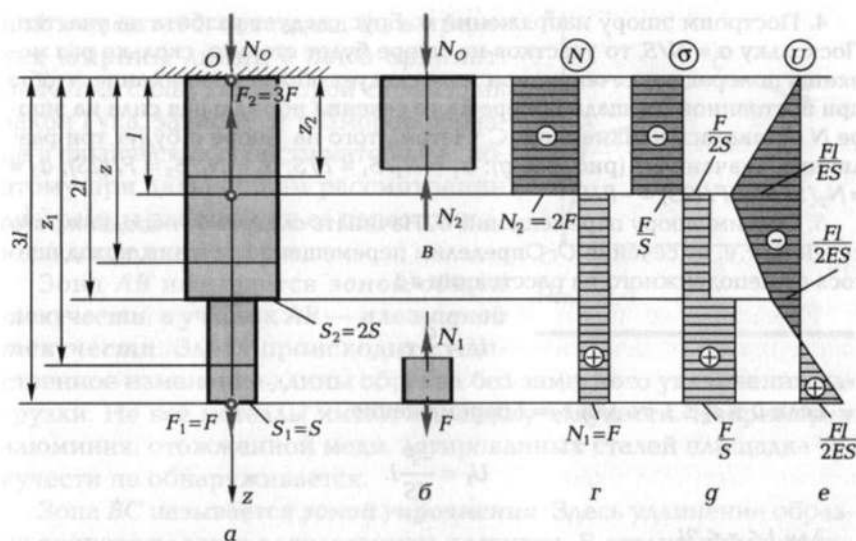


Рис. 2.3

Отсюда $N_O = 2F$.

3. Построим эпюру внутренних сил N . Для этого на расстоянии z_1 рас-
сечем брус и рассмотрим равновесие нижней части (рис. 2.3, б):

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -N_1 + F = 0.$$

Отсюда $N_1 = F$, что справедливо для $l \leq z_1 \leq 3l$. В этих пределах в бру-
се возникает растяжение, так как N_1 направлена от сечения.

Теперь выберем второй участок бруса $0 \leq z_2 \leq l$ и рассмотрим равно-
весие верхней части (рис. 2.3, в):

$$\sum F_{ix} = 0; \quad N_O - N_2 = 0; \quad 2F - N_2 = 0.$$

Отсюда $N_2 = 2F$. Поскольку N_2 направлена к сечению, то брус под дей-
ствием сил N_O и N_2 сжимается. После того как определили все внутренние
нормальные силы, переходим к построению эпюры нормальных сил (рис.
2.3, г). Вправо будем откладывать положительные, а влево — отрица-
тельные значения нормальных сил.

Анализируя построенную эпюру N , заметим, что внутренние силы не
зависят от размеров поперечного сечения, а зависят только от приложен-
ных внешних сил. Поэтому брус разбивают на участки по числу приложен-
ных на его длине сосредоточенных сил. В данном случае было два участка.

При проверке правильности построения эпюры N следует обратить
внимание на то, что на эпюре внутренних сил в тех сечениях, где были
приложены внешние силы, должны быть скачки, равные приложенной
внешней силе.

4. Построим эпюру напряжений σ . Брус следует разбить на участки. Поскольку $\sigma = N/S$, то участков на эпюре будет столько, сколько раз меняется поперечное сечение; при этом следует обращать внимание, чтобы при постоянной площади поперечного сечения нормальная сила на эпюре N оставалась неизменной. С учетом этого на эпюре σ будут три различных значения σ (рис. 2.3, г): $\sigma_1 = N_1/S_1 = F/S$; $\sigma_2 = N_1/S_2 = F/(2S)$; $\sigma_3 = N_2/S_2 = -2F/(2S) = -F/S$.

5. Строим эпюру перемещений U . Начинать следует от неподвижного сечения, т.е. от сечения O . Определим перемещение сечения, находящегося от неподвижного на расстоянии z_2 :

$$U = \frac{\sigma}{E} z_2.$$

Если $0 \leq z_2 \leq l$, то для $z_2 = l$ перемещение

$$U_1 = \frac{-F}{ES} l.$$

Для $l \leq z \leq 2l$

$$U_2 = U_1 + \frac{\sigma}{E} z,$$

или $U_2 = U_1 + \frac{F}{2ES}(z - l)$; при $z = 2l$ $U_2 = -\frac{F}{2ES}l$.

Для $2l \leq z_1 \leq 3l$

$$U_3 = U_2 + \frac{F}{ES}(z_1 - 2l);$$

при $z_1 = 3l$ $U_3 = \frac{F}{2ES}l$.

Откладываясь вычисленные перемещения на эпюре U (рис. 2.3, е).

Диаграмма растяжения

Наиболее наглядно особенности диаграммы растяжения можно показать на примере испытания образца из низкоуглеродистой стали (рис. 2.4). Диаграмма вычерчена в координатах $F—\Delta l$. На кривой можно выделить четыре зоны.

Зона OA носит название *зоны упругости*. Здесь удлинение образца подчиняется закону Гука и $\Delta l = \frac{Fl}{ES}$. На рис. 2.4 этот участок

для большей наглядности показан с отступлением от масштаба. Удлинения на участке OA очень малы, и прямая OA , будучи вычерчен-

ной в масштабе, совпадала бы в пределах ширины линии с осью ординат. Значение силы, для которой справедлив закон Гука, зависит от размеров образца и физических свойств материала, поэтому при дальнейшем рассмотрении диаграммы растяжения ее перестраивают в координатах $\sigma - \epsilon$.

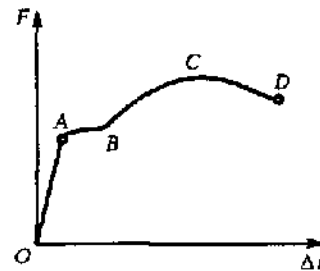


Рис. 2.4

Зона AB называется **зоной общей текучести**, а участок AB — **площадкой текучести**. Здесь происходит существенное изменение длины образца без заметного увеличения нагрузки. Не все металлы имеют площадку текучести. Например, у алюминия, отожженной меди, легированных сталей площадка текучести не обнаруживается.

Зона BC называется **зоной упрочнения**. Здесь удлинение образца сопровождается возрастанием нагрузки. В стадии упрочнения на образце намечается место будущего разрыва и начинает образовываться так называемая **шейка** — местное сужение образца. При дальнейшем растяжении образца шейка быстро прогрессирует. Начиная с точки C , удлинение образца происходит с уменьшением силы, но среднее напряжение в поперечном сечении шейки возрастает. Удлинение образца носит в этом случае местный характер, поэтому участок CD называется **зоной местной текучести**. Точка D соответствует разрушению образца.

Относительная поперечная деформация

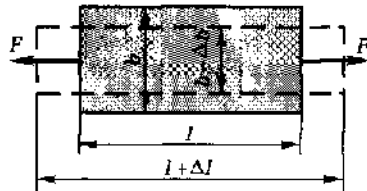
При растяжении (сжатии) прямого бруса кроме продольной деформации ϵ происходит изменение поперечных размеров бруса (рис. 2.5). Ширина бруса при растяжении уменьшается на Δb . Если Δb отнести к первоначальной ширине, то получим выражение для определения относительной поперечной деформации ϵ_1 :

$$\epsilon_1 = \Delta b / b.$$

Отношение относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации называют **коэффициентом Пуассона** и обозначают μ :

$$\mu = \epsilon_1 / \epsilon.$$

Рис. 2.5



Коэффициент Пуассона, так же как и модуль упругости E , характеризует физические свойства материала; для металлов его значение колеблется в пределах от 0,25 до 0,35. Некоторые значения коэффициента μ приведены в табл. 2.1.

2.3. ОСНОВНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

Механические свойства материалов устанавливают опытным путем, испытывая образцы на растяжение. Затем диаграмму растяжения перестраивают в координатах $\sigma - \epsilon$. Как видно из рис. 2.6, она имеет такой же вид, как и в координатах $F - \Delta l$ (см. рис. 2.4), но эта кривая будет характеризовать уже не свойства образца, а свойства материала. Отметим на этой диаграмме характерные точки.

Наибольшее значение напряжения, при котором справедлив закон Гука, называется **пределом пропорциональности** $\sigma_{\text{п}}$.

Упругие свойства материала сохраняются до значений напряжения, называемого пределом упругости. Под **пределом упруго-**

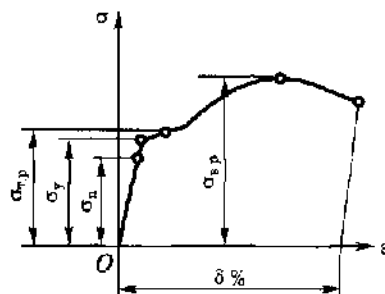


Рис. 2.6

сти σ_y понимается такое наибольшее значение напряжения, при котором материал не получает остаточных деформаций.

На практике предел пропорциональности и предел упругости трудно поддаются измерению, поэтому значения σ_p и σ_y в справочные данные по свойствам материалов обычно не включаются.

Более определенной характеристикой является предел текучести. Под **пределом текучести** понимается такое значение напряжения, при котором рост деформации происходит без заметного увеличения нагрузки. В тех случаях, когда на диаграмме отсутствует явно выраженная площадка текучести, за предел текучести условно принимают такое значение напряжения, при котором остаточная деформация составляет 0,2 %. В этом случае **условный предел текучести** обозначают $\sigma_{0,2}$.

Если необходимо отличить предел текучести при растяжении от предела текучести при сжатии, то в обозначение вводится дополнительный индекс «р» или «с» ($\sigma_{т,р}$ и $\sigma_{т,с}$).

Предел текучести легко определить экспериментально, поэтому он является одной из основных механических характеристик материала.

Отношение максимальной силы, которую способен выдержать образец, к его начальной площади поперечного сечения называется **пределом прочности** или **временным сопротивлением разрыву** — $\sigma_{в,р}$ (сжатия — $\sigma_{в,с}$).

Следует заметить, что $\sigma_{в,р}$ не является тем значением напряжения, при котором разрушается образец. Фактическое напряжение, при котором образец разрушается, будет больше, так как площадь поперечного сечения в этот момент меньше первоначальной площади вследствие образования шейки (напряжение, указанное на диаграмме, подсчитывается для первоначальной площади поперечного сечения образца). Значение $\sigma_{в,р}$ является сравнительной характеристикой прочностных свойств материалов и часто используется при расчетах.

При испытаниях на растяжение определяют еще одну характеристику материала — так называемое относительное удлинение при разрыве δ %.

Относительное удлинение при разрыве представляет собой значение средней остаточной деформации, которая возникает к моменту разрыва на определенной стандартной длине образца. За стандартную длину образца принимают либо $l_0 = 10d$, либо $l_0 = 5d$, где d — диаметр образца.

Значения механических характеристик некоторых наиболее часто встречающихся материалов приведены в табл. 2.1.

2.4. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Размеры элементов конструкции следует подбирать так, чтобы обеспечить их прочность при наименьшей затрате материала. На основании анализа конструкции выявляют точку, где возникают наибольшие напряжения $\sigma_{\text{наиб}}$. Найденное значение напряжения сопоставляют с допускаемым значением напряжения для данного материала и конструкции.

На стадии проектирования конструкции задаются **коэффициентом запаса** n . Он назначается из конкретных условий работы рассчитываемой конструкции. В каждой области техники уже сложились свои традиции, свои требования и специфика расчетов. Например, при проектировании строительных сооружений, рассчитанных на долгие сроки эксплуатации, запасы принимают довольно большими ($n_b = 2 \dots 5$). Индекс «в» показывает, что запас вычисляют от предела прочности σ_b . В авиационной технике на конструкцию накладываются строгие ограничения по массе, поэтому коэффициенты запаса также определяются по пределу прочности, но составляют $n_b = 1,3 \dots 2,0$.

Значение коэффициента запаса зависит и от свойств материала. В случае пластичного материала коэффициент запаса берется от предела текучести ($n_t = 1,5 \dots 2,0$), а для хрупких материалов запас рассчитывается от предела прочности и принимается $n_b = 2,5 \dots 4,0$.

Назначив коэффициент запаса, для данного элемента конструкции рассчитывают **допускаемое напряжение**

$$[\sigma] = \frac{\sigma_t}{n_t} \text{ или } [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}.$$

Затем из условия

$$\sigma_{\text{наиб}} \leq [\sigma]$$

определяют размеры проектируемого элемента.

Пример 2.2

Определить диаметры поперечных сечений бруса (материал — закаленная сталь 30), нагруженного по схеме, приведенной на рис. 2.3, а. Сила $P = 1000 \text{ Н}$.

Решение.

1. Сначала необходимо построить эпюры N и σ . Методика и последовательность построения эпюр представлены в примере 2.1.

2. Определяем коэффициент запаса. Поскольку материал пластичный, принимаем коэффициент запаса $n_T = 1,5$.

3. Вычисляем допускаемое напряжение. Из табл. 2.1 для стали 30 выписываем $\sigma_{T.p} = \sigma_{T.c} = 330 \text{ Н/мм}^2$. После этого можно определить допускаемое напряжение при растяжении и сжатии:

$$[\sigma]_p = [\sigma]_c = \frac{330}{1,5} = 220 \text{ Н/мм}^2.$$

4. Проанализировав эпюру напряжений (см. рис. 2.3, *г*), делаем вывод, что на двух участках возникает одинаковое напряжение $\sigma_{\text{наиб}} = F/S$. Поскольку данный материал работает одинаково на растяжение и сжатие, то можно для любого из этих двух участков записать условие $\sigma_{\text{наиб}} \leq [\sigma]$:

$$\frac{1000}{S} = 220 \text{ Н/мм}^2.$$

5. Определяем диаметры круглого бруса из полученного уравнения: $S = 4,55 \text{ мм}^2$. Зная, что $S = \pi r^2$, определяем $r_1 = 1,2 \text{ мм}$; $d_1 = 2,4 \text{ мм}$. На участке, где площадь $S_2 = 2S$, диаметр $d_2 = 3,4 \text{ мм}$.

2.5. СРЕЗ И СМЯТИЕ

Напряжения и деформации при сдвиге [срезе]

В подразд. 2.1 уже упоминалось, что в поперечном сечении могут возникать как нормальные σ , так и касательные напряжения τ . Если к короткому брусу, жестко заделанному одним концом в стену (рис. 2.7, *а*), перпендикулярно оси бруса приложить силу $\bar{F}$, то в поперечных сечениях возникнет внутренняя поперечная сила Q

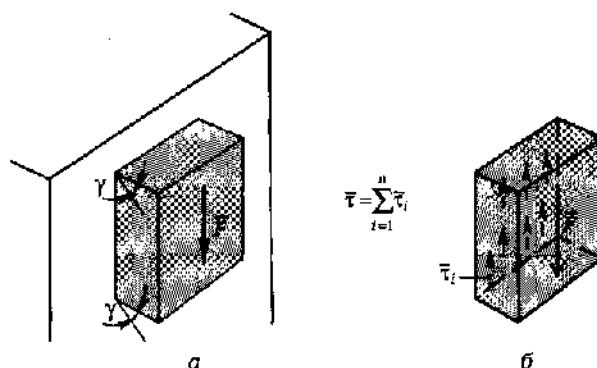


Рис. 2.7

в плоскости сечения, а следовательно, и касательное напряжение $\tau = Q/S$.

Параллельные сечения бруса сдвигаются относительно друг друга (рис. 2.7, б) так, что верхняя грань образует угол γ с горизонталью. Установлено, что касательное напряжение τ прямо пропорционально **угловой деформации** γ :

$$\tau = G\gamma,$$

где G — модуль упругости при сдвиге.

Эта зависимость выражает **закон Гука для сдвига**. Явление среза можно наблюдать, если стальную полосу или бумагу перерезать ножницами, или, например, в случае, когда к клепаному соединению приложена сила, большая, чем та, на которую данное соединение было рассчитано. На рис. 2.8 показано, что приложенные силы $\bar{F}$ вызывают деформацию сдвига, и под их действием может произойти срез заклепки. Вот почему сдвиг часто называют срезом.

Модуль упругости при сдвиге зависит от модуля упругости E рода E :

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Если известны E и μ , то можно определить модуль упругости при сдвиге. Например, для стали 30 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$, $\mu = 0,3$, следовательно,

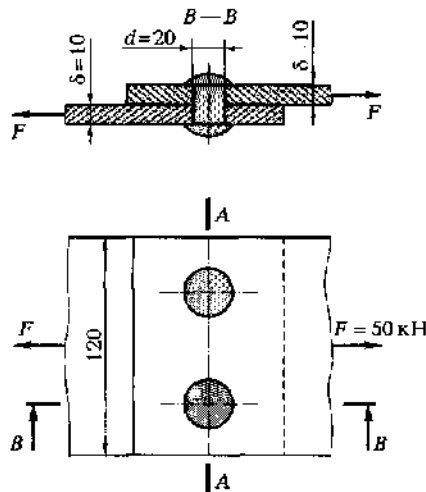


Рис. 2.8

$$G = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1 + 0,3)} = 0,77 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2.$$

Подчеркнем, что сдвиг — это напряженное состояние. Если возникшие при сдвиге деформации находятся в пределах упругости, то после снятия нагрузки размеры и форма детали восстанавливаются. Если же предел упругости превышен, то наблюдаются пластические деформации и после снятия нагрузки остается наметившееся место среза. По достижении предельных напряжений произойдет срез.

Пример 2.3

Проверить прочность заклепок (см. рис. 2.8), если $[\tau]_{\text{ср}} = 100 \text{ Н/мм}^2$.

Решение.

1. Определяем фактическое касательное напряжение, возникающее в поперечных сечениях заклепок под действием заданных сил. Поскольку число заклепок $i = 2$ и они срезаются по одной плоскости (число плоскостей среза $k = 1$), то

$$\tau_{\text{факт}} = \frac{F}{S} = \frac{F}{(ik)\pi d^2/4} = \frac{50\,000}{2 \cdot 1 \cdot \pi \frac{20^2}{4}} = 79,6 \text{ Н/мм}^2.$$

2. Проверяем прочность заклепок: фактическое касательное напряжение в поперечном сечении заклепки должно быть меньше или равно допускаемому касательному напряжению на срез. Действительно, $79,6 < 100$. Следовательно, под действием силы $F = 50 \text{ кН}$ не произойдет среза заклепок.

Смятие

При сжатии двух тел возникает опасность смятия контактирующих поверхностей. Напряжения, возникающие на контактирующих поверхностях, называются **напряжениями смятия**. Смятие имеет место, например, в клепаных и болтовых соединениях. Напряжение смятия определяют по формуле

$$\sigma_{\text{см}} = F/S_{\text{см}},$$

где F — сила, с которой сдавливаются контактирующие поверхности; $S_{\text{см}}$ — площадь смятия.

Если поверхность смятия является криволинейной, то площадь смятия вычисляется как площадь проекции этой поверхности на плоскость, перпендикулярную к линии действия сжимающей силы.

Пример 2.4

Проверить прочность клепаного соединения (см. рис. 2.8), если $[\tau]_{\text{ср}} = 100 \text{ Н/мм}^2$; $[\sigma]_{\text{см}} = 240 \text{ Н/мм}^2$; $[\sigma]_{\text{р}} = 140 \text{ Н/мм}^2$.

Решение.

1. Проверяем прочность заклепки на срез (методика расчета приведена в примере 2.3).

2. Проверяем на смятие стенки отверстий в соединяемых листах:

$$\sigma_{\text{факт.см}} = \frac{F}{i\delta_{\text{лист}}d} = \frac{50\,000}{2 \cdot 10 \cdot 20} = 125 \text{ Н/мм}^2.$$

Полученное значение фактического напряжения смятия меньше допускаемого, так как по условию $[\sigma]_{\text{см}} = 240 \text{ Н/мм}^2$. Следовательно, смятия стенок отверстий не произойдет.

3. Проверяем прочность листов на растяжение по формуле

$$\sigma_{\text{факт.р}} = F/S \leq [\sigma]_{\text{р}}.$$

Для определения опасного сечения в сложных случаях обычно строят эпюры N , а затем σ . В данном случае задача более простая. Ясно, что опасным сечением является сечение А—А. Площадь поперечного сечения каждого листа $S = 10 \cdot (120 - 2 \cdot 20) = 800 \text{ мм}^2$, а фактическое напряжение

$$\sigma_{\text{факт.р}} = \frac{50\,000}{800} = 62,5 \text{ Н/мм}^2,$$

что меньше допускаемого: $62,5 < 140$.

От в е т. Можно считать, что прочность клепаного соединения достаточна.

2.6. КРУЧЕНИЕ

Под **кручением** понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях возникает только крутящий момент. Прочие внутренние силовые факторы (нормальная и поперечные силы, изгибающие моменты) равны нулю. Рассмотрим кручение круглого бруса (рис. 2.9). К круглому брусу, жестко заделанному в стенку, на свободном торце приложен крутящий момент M . В результате этого брус деформируется: смежные сечения поворачиваются относительно друг друга, образующая OB искривляется и занимает положение OC . При рассмотрении кручения принимаются следующие допущения и правила:

- ось бруса не деформируется;
- поперечные сечения, плоские до деформации, после деформации также остаются плоскими;

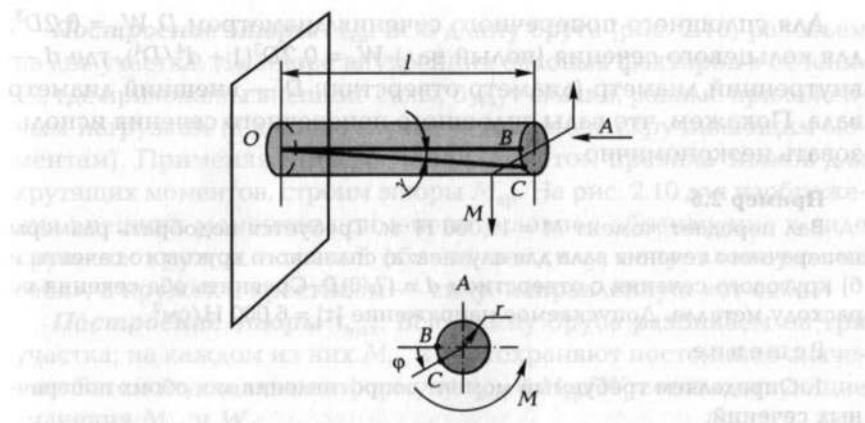


Рис. 2.9

- продольные волокна не изменяют своей длины (угол γ настолько мал, что изменением длины можно пренебречь);
- радиусы r поперечных сечений остаются прямыми после деформации, поворачиваясь на некоторый угол φ ;
- для крутящих моментов принято следующее правило знаков: если смотреть на поперечное сечение со стороны внешней нормали и видеть внутренний крутящий момент $M_{кр}$ направленным против хода часовой стрелки, то момент считается положительным.

При кручении в поперечном сечении бруса возникают **касательные напряжения (чистый сдвиг)**.

Угол закручивания φ и относительный угол закручивания θ связывает следующая зависимость:

$$\theta = \varphi / l.$$

Касательные напряжения τ при кручении распределяются в сечении по линейной зависимости; в центре они равны нулю, а на максимальном радиусе поперечного сечения — максимальному значению τ_{max} , по которому ведется расчет. Значение касательного напряжения зависит от внутреннего крутящего момента и геометрической характеристики поперечного сечения:

$$\tau_{max} = M_{кр} / W_p,$$

где W_p — полярный момент сопротивления.

Для сплошного поперечного сечения диаметром D $W_p = 0,2D^3$; для кольцевого сечения (полый вал) $W_p = 0,2D^3(1 - d^4/D^4)$, где d — внутренний диаметр (диаметр отверстия); D — внешний диаметр вала. Покажем, что валы сплошного поперечного сечения использовать неэкономично.

Пример 2.5

Вал передает момент $M = 10\,000 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Требуется подобрать размеры поперечного сечения вала для случаев: а) сплошного кругового сечения и б) кругового сечения с отверстием $d = (7/8)D$. Сравнить оба сечения по расходу металла. Допускаемое напряжение $[\tau] = 6\,000 \text{ Н/см}^2$.

Решение.

1. Определяем требуемый момент сопротивления для обоих поперечных сечений:

$$W_p = \frac{M_{кр}}{[\tau]} = \frac{10\,000 \cdot 100}{6\,000} = 167 \text{ см}^3.$$

2. Определяем диаметр вала сплошного сечения:

$$D^3 = \frac{167}{0,2} = 835 \text{ см}^3; D = 9,42 \text{ см}.$$

3. Определяем диаметр вала полого поперечного сечения:

$$D^3 = \frac{167}{0,2 \left[1 - \left(\frac{7}{8} \right)^4 \right]} = 2\,034 \text{ см}^3; D = 12,7 \text{ см}.$$

4. Определяем расход металла. Для этого вычислим площади поперечных сечений сплошного и полого валов:

для сплошного вала

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = 69,69 \text{ см}^2;$$

для полого вала

$$S = \frac{\pi D^2}{4} \left(1 - \frac{d^2}{D^2} \right) = 29,68 \text{ см}^2.$$

Поскольку расход металла будет пропорционален площади поперечного сечения, то полое сечение является более экономичным и в данном случае дает более чем двукратное снижение веса вала.

Построение эпюр

При кручении, как и при растяжении, строят эпюры внутренних силовых факторов (крутящих моментов), напряжений ($\tau_{\max}$) и перемещений (углов закручивания φ).

Построение эпюры $M_{кр}$. Всю длину бруса (рис. 2.10) разобьем на два участка. На эпюре внутренних силовых факторов в сечениях, где приложены внешние силы, будут скачки, равные приложенным нагрузкам (в данном случае — внешним скручивающим моментам). Применяя метод сечений с учетом правила знаков для крутящих моментов, строим эпюры $M_{кр}$. На рис. 2.10 для изображения внешних моментов применено условное обозначение в виде кружков: кружок с точкой обозначает силу, направленную «на себя», а кружок с крестиком — силу, направленную «от себя».

Построение эпюры τ_{max} . Всю длину бруса разбиваем на три участка; на каждом из них $M_{кр}$ и W_p сохраняют постоянное значение. Затем подставляем в формулу $\tau_{max} = M_{кр}/W_p$ соответствующие значения $M_{кр}$ и W_p :

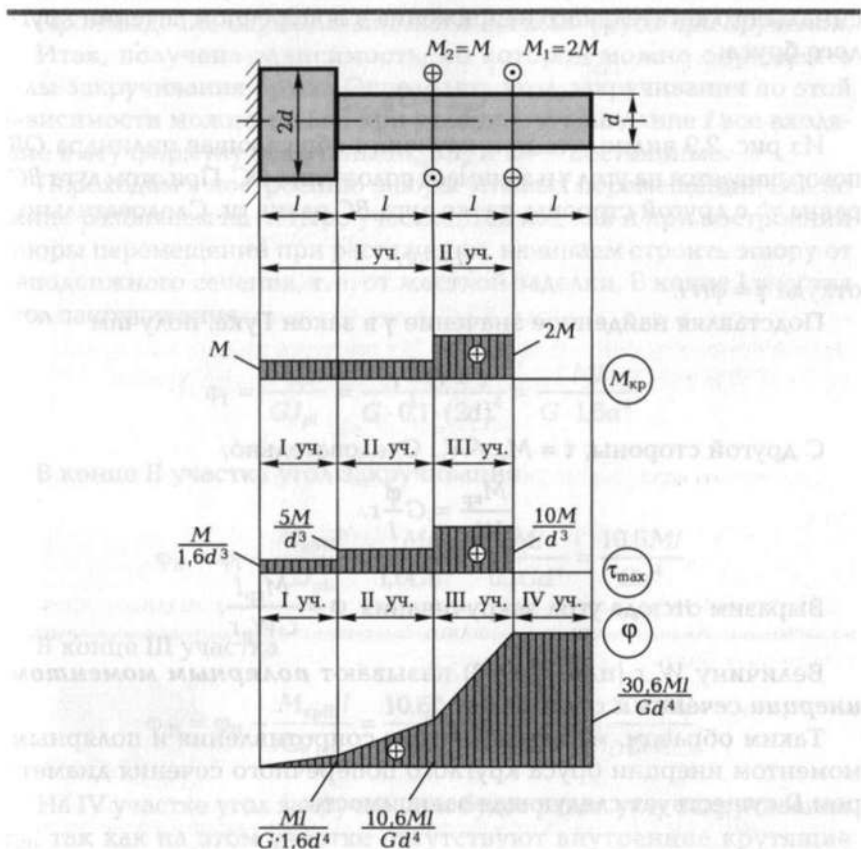


Рис. 2.10

на I участке $M_{кр} = +M$; $W_p = 0,2(2d)^3 = 1,6d^3$; $\tau_{max} = \frac{M}{1,6d^3}$;

на II участке $M_{кр} = +M$; $W_p = 0,2d^3$; $\tau_{max} = \frac{5M}{d^3}$;

на III участке $M_{кр} = +2M$; $W_p = 0,2d^3$; $\tau_{max} = \frac{10M}{d^3}$.

Поскольку все внутренние крутящие моменты положительны, то и все касательные напряжения на эпюре τ_{max} будут также положительны.

Построение эпюры φ . Прежде всего необходимо установить зависимость, по которой будем определять углы закручивания φ . На основании закона Гука для сдвига запишем выражение для максимального касательного напряжения в поперечном сечении круглого бруса:

$$\tau_{max} = G\gamma.$$

Из рис. 2.9 видно, что при кручении образующая цилиндра OB поворачивается на угол γ и занимает положение OC . При этом дуга BC равна γl ; с другой стороны, та же дуга BC равна φr . Следовательно,

$$\gamma l = \varphi r,$$

откуда $\gamma = \varphi r / l$.

Подставляя найденное значение γ в закон Гука, получим

$$\tau = G \frac{\varphi}{l} r.$$

С другой стороны, $\tau = M_{кр} / W_p$. Следовательно,

$$\frac{M_{кр}}{W_p} = G \frac{\varphi}{l} r.$$

Выразим отсюда угол закручивания $\varphi = \frac{M_{кр} l}{G W_p r}$.

Величину $W_p r$ (или $W_p D / 2$) называют **полярным моментом инерции сечения** и обозначают J_p .

Таким образом, между моментом сопротивления и полярным моментом инерции бруса круглого поперечного сечения диаметром D существует следующая зависимость:

$$W_p = \frac{J_p}{(D/2)}.$$

Полярный момент инерции:
для сплошного круглого бруса

$$J_p \cong 0,1D^4;$$

для полого круглого бруса

$$J_p \cong 0,1D^4 \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right).$$

Запишем выражение для угла закручивания φ в виде

$$\varphi = \frac{M_{кр}}{GJ_p} l.$$

Произведение GJ_p называют **жесткостью бруса при кручении**.

Итак, получена зависимость, по которой можно определять углы закручивания бруса. Определять угол закручивания по этой зависимости можно только при условии, что на длине l все входящие в эту формулу величины $M_{кр}$, J_p и G — постоянные.

Переходим к построению эпюры угловых перемещений. Вал по длине разбиваем на четыре участка. Так же, как и при построении эпюры перемещений при растяжении, начинаем строить эпюру от неподвижного сечения, т. е. от жесткой заделки. В конце I участка угол закручивания

$$\varphi_I = \frac{M_{крI}l}{GJ_{pI}} = \frac{Ml}{G \cdot 0,1 \cdot (2d)^4} = \frac{Ml}{G \cdot 1,6d^4}.$$

В конце II участка угол закручивания

$$\varphi_{II} = \varphi_I + \frac{M_{крII}l}{GJ_{pII}} = \frac{Ml}{1,6Gd^4} + \frac{Ml}{0,1Gd^4} = \frac{10,6Ml}{Gd^4}.$$

В конце III участка

$$\varphi_{III} = \varphi_{II} + \frac{M_{крIII}l}{GJ_{pIII}} = \frac{10,6Ml}{Gd^4} + \frac{2Ml}{0,1Gd^4} = \frac{30,6Ml}{Gd^4}.$$

На IV участке угол закручивания будет равен углу закручивания φ_{III} , так как на этом участке отсутствуют внутренние крутящие моменты.

Вычисленные угловые перемещения откладываем на эпюру φ .

2.7. ПРЯМОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Геометрические характеристики поперечных сечений бруса

При решении задач, связанных с изгибом, необходимо знать некоторые геометрические характеристики поперечного сечения.

Статические моменты сечения. Некоторое поперечное сечение бруса произвольной формы (рис. 2.11) свяжем с системой координат x и y и рассмотрим два интеграла

$$s_x = \int y dS; \quad s_y = \int x dS.$$

Каждый из интегралов представляет собой сумму произведений элементарных площадок на расстояние до соответствующей оси (x или y). Первый интеграл называется **статическим моментом сечения** относительно оси x , а второй — относительно оси y .

Рассмотрим, как изменятся статические моменты относительно параллельных осей.

Пусть расстояние между осями x_1 и x_2 равно b , а между осями y_1 и y_2 равно a (рис. 2.12).

Положим, что площадь сечения S и статические моменты относительно осей x_1 и y_1 заданы. Требуется определить статические моменты относительно осей x_2 и y_2 . Из рисунка видно, что $x_2 = x_1 - a$, а $y_2 = y_1 - b$. Искомые статические моменты будут равны

$$s_{x2} = \int_S (y_1 - b) dS; \quad s_{y2} = \int_S (x_1 - a) dS,$$

или

$$s_{x2} = s_{x1} - bS; \quad s_{y2} = s_{y1} - aS.$$

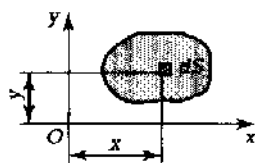


Рис. 2.11

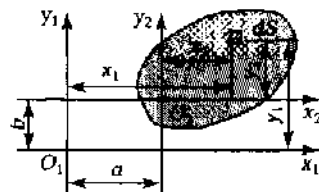


Рис. 2.12

Следовательно, при параллельном переносе осей статический момент меняется на величину, равную произведению площади S на расстояние между осями.

Всегда можно подобрать a и b (причем единственным образом) так, чтобы $s_{x1} - bS = 0$ и $s_{y1} - aS = 0$, т. е. статические моменты относительно осей x_2 и y_2 обращаются в нуль. Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется **центральной**, а точка пересечения центральных осей называется **центром тяжести сечения**. Расстояние до центральных осей от произвольно взятых определяется зависимостями

$$b = y_C = s_{x1}/S; \quad a = x_C = s_{y1}/S.$$

Статический момент относительно любой оси, проходящей через центр тяжести сечения, равен нулю.

Размерность статических моментов — миллиметр в кубе (мм³).

Пример 2.6

Найти, на каком расстоянии от основания расположен центр тяжести треугольника (рис. 2.13).

Решение.

1. Начало координат выбираем в произвольной точке O , а ось x_1 совмещаем с основанием треугольника.
2. Вычисляем статический момент треугольника относительно оси x_1 :

$$s_{x1} = \int_S y_1 dS.$$

Элементарная площадка $dS = l dy_1$. Из подобия треугольников получаем

$$l = B(H - y_1)/H.$$

Таким образом, статический момент относительно оси x_1

$$s_{x1} = (B/H) \int_0^H (H - y_1) y_1 dS_1 = BH^2/6.$$

3. Определяем расстояние от центра тяжести до основания треугольника, если площадь треугольника $S = BH/2$:

$$y_C = s_{x1}/S = \frac{BH^2/6}{BH/2} = \frac{H}{3}.$$

Пример 2.7

Определить положение центра тяжести для плоского сечения, составленного из трех фигур (рис. 2.14): швеллера № 20У (ГОСТ 8240—97), уголка № 10 (ГОСТ 8509—93) и полосы, размеры которой представлены на чертеже.

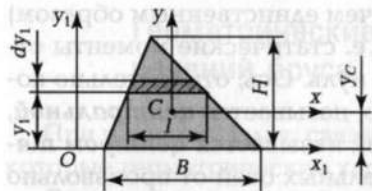


Рис. 2.13

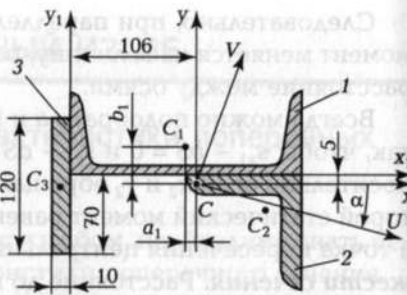


Рис. 2.14

Решение.

1. Проставим номера фигур.
2. Оси координат x_1 и y_1 направляем, как указано на рисунке.
3. Определим геометрические характеристики фигур, входящих в сложное составное сечение:

а) швеллер № 20У — поз. 1.

Выписываем из ГОСТ 8240—97 геометрические характеристики: $S_1 = 23,4 \text{ см}^2$; $x_{1C} = 10 \text{ см}$; $y_{1C} = 2,07 \text{ см}$ (см. Приложение III);

б) уголок № 10 — поз. 2.

Выписываем из ГОСТ 8509—93 (см. Приложение I) геометрические характеристики для равнополочного уголка № 10 ($100 \times 100 \times 12$) и рассчитываем координаты его центра тяжести по отношению к выбранной системе отсчета: $S_2 = 22,8 \text{ см}^2$; $x_{2C} = 10 + (10 - 2,91) = 17,09 \text{ см}$; $y_{2C} = -2,91 \text{ см}$;

в) полоса — поз. 3.

Определяем ее геометрические характеристики: $S_3 = 12 \cdot 1 = 12 \text{ см}^2$; $x_{3C} = -0,5 \text{ см}$; $y_{3C} = -1 \text{ см}$.

4. Запишем в табл. 2.2 рассчитанные (или взятые из стандартов) площади, координаты центров тяжести и статические моменты плоских фигур, учитывая, что статический момент сечения i -й фигуры относитель-

Таблица 2.2

Номер фигуры	Площадь S_i , см^2	Координаты центра тяжести, см		Статические моменты, см^3	
		x_{iC}	y_{iC}	S_{xi}	S_{yi}
1	23,4	10	2,07	48,44	234
2	22,8	17,	-2,91	-66,4	389,6
3	12	-0,5	-1	12	-6
Σ	58,2	—	—	-29,96	617,6

но оси x_1 $s_{ix1} = y_{1C} S_i$, где y_{1C} — координата центра тяжести сечения i -й фигуры относительно оси x_1 ; S_i — площадь фигуры; статический момент сечения i -й фигуры относительно оси y_1 : $s_{iy1} = x_{1C} S_i$, где x_{1C} — координата центра тяжести сечения i -й фигуры относительно оси y_1 .

5. Вычисляем координаты центра тяжести C сложного составного сечения:

$$x_C = \frac{\sum s_{iy1}}{\sum S_i} = \frac{617,6}{58,2} = 10,6 \text{ см}; \quad y_C = \frac{\sum s_{ix1}}{\sum S_i} = \frac{-29,96}{58,2} = -0,5 \text{ см}.$$

Моменты инерции сечения. Рассмотрим три интеграла

$$J_x = \int_S y^2 dS; \quad J_y = \int_S x^2 dS; \quad J_{xy} = \int_S xy dS,$$

где через x и y обозначены текущие координаты элементарной площадки dS (см. рис. 2.11) в произвольно взятой системе координат. Первые два интеграла называются **осевыми моментами инерции** сечения соответственно относительно осей x и y , а третий интеграл — **центробежным моментом инерции** сечения относительно осей x , y . Осевые моменты всегда положительны, а центробежный момент инерции может быть как положительным, так и отрицательным (в зависимости от расположения сечения относительно осей x , y).

Рассмотрим, как изменяются значения моментов инерции сечения при параллельном переносе осей.

Положим, что заданы статические моменты и моменты инерции относительно осей x_1 и y_1 . Требуется определить моменты инерции относительно осей x_2 и y_2 (см. рис. 2.12):

$$J_{x2} = \int_S y_2^2 dS; \quad J_{y2} = \int_S x_2^2 dS; \quad J_{x2y2} = \int_S x_2 y_2 dS.$$

Подставим значения $x_2 = x_1 - a$ и $y_2 = y_1 - b$ в подынтегральную функцию:

$$J_{x2} = \int_S (y_1 - b)^2 dS; \quad J_{y2} = \int_S (x_1 - a)^2 dS; \quad J_{x2y2} = \int_S (x_1 - a)(y_1 - b) dS.$$

После раскрытия скобок получаем

$$J_{x2} = J_{x1} - 2bs_{x1} + b^2 S; \quad J_{y2} = J_{y1} - 2as_{y1} + a^2 S;$$

$$J_{x2y2} = J_{x1y1} - as_{x1} + bs_{y1} + abS.$$

Если оси x_1 и y_1 — центральные, то s_{x1} и s_{y1} равны нулю. В этом случае полученные зависимости упрощаются:

$$J_{x2} = J_{x1} + b^2 S; \quad J_{y2} = J_{y1} + a^2 S; \quad J_{x2y2} = J_{x1y1} + abS.$$

Следует запомнить, что при переходе от центральных осей к нецентральному осевым моменты инерции увеличиваются и величины $b^2 S$ и $a^2 S$ нужно к моментам инерции прибавлять, в противоположном случае — вычитать.

При определении центробежных моментов инерции следует учитывать знаки величин a и b . Однако при параллельном переносе осей можно установить, в какую сторону меняется J_{xy} . Площади сечения, находящиеся в I и III квадрантах систем координат, дают положительное значение центробежного момента, а находящиеся во II и IV квадрантах — отрицательные. Поэтому при переносе осей следует установить, в каких квадрантах площади сечения увеличиваются. Например, если при переходе от центральных осей возрастает площадь во втором квадранте, то центробежный момент инерции уменьшается, следовательно, произведение abS из центрального центробежного момента нужно вычесть.

Размерность моментов инерции — миллиметр в четвертой степени (мм^4).

Пример 2.0

Найти момент инерции треугольника (см. рис. 2.13) относительно основания и относительно центральной оси, параллельной основанию.

Решение.

1. Вычислим момент инерции относительно оси x_1 :

$$J_{x1} = \int_S y_1^2 dS = \int_0^H y_1^2 l dy_1.$$

Из подобия треугольников имеем $l = B(H - y_1)/H$. Подставим это выражение в подынтегральную функцию

$$J_{x1} = \left(B/H \right) \int_0^H (H - y_1) y_1^2 dy_1,$$

откуда

$$J_{x1} = BH^3/12.$$

2. Определяем момент инерции относительно центральной оси.

Как было сказано ранее, центральный момент инерции всегда меньше момента инерции относительно других параллельных, но не центральных

осей. Следовательно, чтобы найти центральный момент инерции относительно оси x , нужно вычесть $b^2 S$ из J_{x1} . В этом случае

$$J_x = J_{x1} - (H/3)^2 S$$

или

$$J_x = BH^3/36.$$

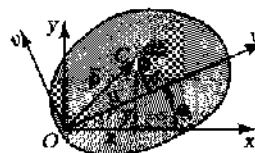


Рис. 2.15

Главные оси и главные моменты инерции. Пусть известны моменты инерции J_x , J_y и J_{xy} относительно нецентральных осей x , y . Необходимо установить зависимость между этими моментами инерции и моментами инерции относительно осей u и v , которые повернуты относительно осей x и y на угол α (рис. 2.15). Положение элементарной площади плоской фигуры dS относительно общего начала двух систем координат определяет радиус-вектор $\vec{r}$. Его проекции на оси координат u , v связаны с его же проекциями на оси x , y следующими зависимостями:

$$u = y \sin \alpha + x \cos \alpha;$$

$$v = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Запишем выражения для моментов инерции сечения относительно осей u и v :

$$J_u = \int_S v^2 dS; \quad J_v = \int_S u^2 dS; \quad J_{uv} = \int_S uv dS$$

и подставим вместо координат u и v полученные ранее зависимости. Тогда

$$J_u = \int_S (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dS;$$

$$J_v = \int_S (y \sin \alpha + x \cos \alpha)^2 dS;$$

$$J_{uv} = \int_S (y \sin \alpha + x \cos \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dS,$$

откуда

$$J_u = J_x \cos^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha;$$

$$J_v = J_x \sin^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \cos^2 \alpha;$$

$$J_{uv} = J_{xy} \cos 2\alpha + \frac{J_x - J_y}{2} \sin \alpha.$$

Сложим почленно первые два равенства, в результате чего имеем

$$J_u + J_v = J_x + J_y.$$

Таким образом,

сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно-перпендикулярных осей не зависит от угла α и при повороте остается постоянной.

Кроме того, сумма осевых моментов инерции может быть записана следующим образом:

$$J_x + J_y = \int_S (x^2 + y^2) dS = \int_S \rho^2 dS.$$

Известно, что интеграл $\int_S \rho^2 dS$ представляет собой момент инерции относительно полюса, т. е. полярный момент инерции, следовательно

$$J_u + J_v = J_p.$$

Для круглого сечения $J_x = J_y$ и осевой момент инерции в два раза меньше полярного:

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_p.$$

Еще раз заметим, что при повороте осей каждая из величин J_u и J_v изменяется, но их сумма остается неизменной. Следует предположить, что при некотором угле поворота один из осевых моментов достигает своего минимального значения, а другой — максимального. Такой угол можно найти, взяв производную от J_u по углу поворота и приравняв ее к нулю:

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = 0.$$

Мы написали уравнение, из которого можно определить угол поворота α , при котором осевой момент инерции J_u принимает экстремальные значения: максимальное и минимальное. Решая это уравнение, получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{J_y - J_x}.$$

Если подставить значение этого угла в выражение для определения центробежного момента инерции J_{uv} относительно этих

осей, то он обращается в нуль. Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты принимают экстремальные значения, называются **главными**, а осевые моменты инерции относительно главных осей называются **главными моментами инерции**. Если главные оси являются центральными, то они называются **главными центральными осями**, а моменты инерции — **главными центральными моментами инерции**.

Если сечение имеет ось симметрии (например, круг, прямоугольник), то эта ось всегда будет главной, так как центробежный момент инерции относительно нее равен нулю (центробежный момент инерции части сечения, расположенного по одну сторону от оси симметрии равен моменту части, расположенной по другую, но с обратным знаком).

Пример 2.9

Найти момент инерции прямоугольника относительно основания и центральной оси, параллельной основанию; размеры прямоугольника указаны на рис. 2.16.

Решение.

1. Проводим оси координат: через центр тяжести сечения x, y ; вдоль основания и по перпендикулярной к нему стороне x_1, y_1 .

2. Выделяем элементарную площадку $dS = B dy_1$.

3. Определяем момент инерции прямоугольника относительно оси x_1 :

$$J_{x_1} = \int_S y_1^2 dS = \int_0^H y_1^2 B dy_1 = \frac{BH^3}{3}.$$

4. Определяем центральный момент инерции относительно оси x .

Центральный момент инерции всегда меньше моментов инерции относительно оси, параллельной центральной. Следовательно:

$$J_x = J_{x_1} - \left(\frac{H}{2}\right)^2 S = \frac{BH^3}{3} - \frac{BH^3}{4} = \frac{BH^3}{12}.$$

Определив положение главных осей, необходимо установить зависимости, которые позволят вычислять главные моменты инерции. Для этого в результате тригонометрических преобразований получаем

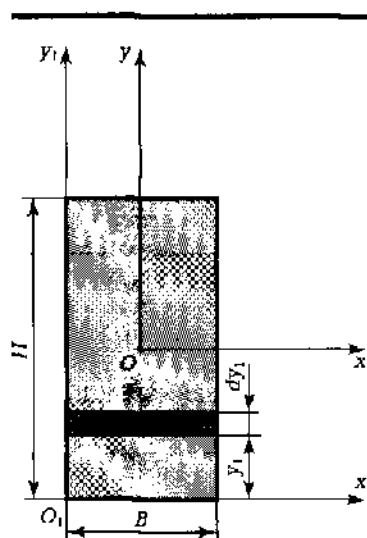


Рис. 2.16

$$\begin{aligned}
J_{\eta} &= J_x \cos^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha = \\
&= \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_y - J_x}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha; \\
J_{\xi} &= J_x \sin^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \cos^2 \alpha = \\
&= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_y - J_x}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha.
\end{aligned}$$

Далее, учитывая тригонометрические соотношения

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} \quad \text{и} \quad \sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}},$$

а также зависимость $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}$, получаем формулы для определения главных моментов инерции:

$$J_{\max/\min} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}.$$

Знак «+» соответствует максимальному моменту инерции, знак «−» — минимальному.

Пример 2.10

Для сечения, составленного из швеллера № 20У (ГОСТ 8240—97), равнополочного уголка № 10 (100 × 100 × 12) (ГОСТ 8509—93) и полосы, размеры которой проставлены на рис. 2.14, определить главные центральные моменты инерции.

Решение.

1. Разбиваем сечение на простейшие фигуры, для которых моменты инерции можно определить или взять из стандартов.

2. Проставляем номера позиций.

3. Определяем положение центра тяжести сечения (см. пример 2.7).

4. Через найденный центр тяжести сечения C проводим центральные оси x, y .

5. Вычисляем моменты инерции отдельных фигур относительно собственных центральных осей:

а) швеллер № 20У (поз. 1) — выписываем из стандарта его моменты инерции: $J_{xc1} = 113 \text{ см}^4$, $J_{yc1} = 1\,520 \text{ см}^4$. Центробежный момент инерции швеллера будет равен нулю, так как он имеет одну ось симметрии. Заносим данные в табл. 2.3.

Кроме того, внесем в эту таблицу размеры a, b и другие, которые облегчат расчеты (см. табл. 2.3);

Таблица 2.3

Номер фигуры	J_{xO} , см ⁴	J_{yO} , см ⁴	J_{xyO} , см ⁴	b , см	a , см	b^2 , см ²
1	113	1 520	0	2,57	0,6	6,6
2	209	209	-122	-2,41	6,49	5,8
3	144	1	0	-0,5	-11,1	0,25
Σ	466	1 730	-122	—	—	—

Продолжение табл. 2.3

Номер фигуры	a^2 , см ²	ab , см ²	b^2S , см ³	a^2S , см ³	abS , см ⁴
1	0,36	-1,54	154,44	8,42	-36
2	42,1	-15,64	132,2	959,8	-256,6
3	123,2	5,55	3	1 478,4	66,6
Σ	—	—	289,6	1 446,6	-326

б) уголок № 10 (поз. 2) — выписываем из стандарта $J_{xC2} = J_{yC2} = 209 \text{ см}^4$.

Центробежный момент инерции для равнополочного уголка определяем следующим образом. Во-первых, нужно установить знак центробежного момента. Если провести центральные оси через C_2 , то станет ясно, что большая часть площади сечения уголка находится во втором и четвертом квадрантах, следовательно, центробежный момент будет отрицательным. Далее воспользуемся формулой (с учетом того, что для данного уголка $J_{xC2} = J_{yC2}$)

$$J_u = \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} = J_x + J_{xy}.$$

Откуда

$$J_{xy} = J_u - J_x.$$

Наибольший главный осевой момент инерции для уголка данного номера $J_u = 331 \text{ см}^4$ (см. ГОСТ 8509—93).

Таким образом,

$$J_{xy} = 331 - 209 = 122 \text{ см}^4.$$

Заносим в табл. 2.3 значение центробежного момента уголка относительно собственных центральных осей со знаком «-»;

в) полоса — поз. 3.

Определяем осевой момент инерции относительно центральной оси x , проходящей через C_3 :

$$J_{xC3} = \frac{BH^3}{12} = \frac{1 \cdot 12^3}{12} = 144 \text{ см}^4;$$

$$J_{yC3} = \frac{BH^3}{12} = \frac{12 \cdot 1^3}{12} = 1 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции полосы равен нулю, так как она имеет ось симметрии.

6. Заполняем все графы табл. 2.3.

7. Определяем угол, на который нужно повернуть центральные оси сечения x и y , проходящие через центр C , чтобы они стали главными:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} = \frac{2\sum(J_{xyC_i} + a_i b_i S_i)}{\sum(J_{yC_i} + a_i^2 S_i) - \sum(J_{xC_i} + b_i^2 S_i)};$$

$$\sum(J_{xyC_i} + a_i b_i S_i) = -122 - 326 = -448 \text{ см}^4;$$

$$\sum(J_{yC_i} + a_i^2 S_i) = 1\,730 + 2\,446,6 = 4\,176,6 \text{ см}^4;$$

$$\sum(J_{xC_i} + b_i^2 S_i) = 466 + 289,6 = 755,6 \text{ см}^4.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot (-448)}{4\,176,6 - 755,6} = -0,262.$$

Следовательно, $\alpha = 7^\circ 20'$.

Знак «-» означает, что нужно повернуть оси x , y по часовой стрелке.

8. Вычисляем главные центральные моменты инерции

$$J_u = J_x \cos^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha =$$

$$= 755,6 \cos^2 7^\circ 20' - 448 \sin 14^\circ 40' + 4\,176,6 \sin^2 7^\circ 20' = 697,7 \text{ см}^4;$$

$$J_v = J_x \sin^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \cos^2 \alpha =$$

$$= 755,6 \sin^2 7^\circ 20' + 448 \sin 14^\circ 40' + 4\,176,6 \cos^2 7^\circ 20' = 4\,234,5 \text{ см}^4.$$

Как ранее отмечалось, сумма моментов инерции не должна изменяться при повороте осей, т. е.

$$J_u + J_v = J_x + J_y$$

или $697,7 + 4\,234,5 = 755,6 + 4\,176,6$.

Проверка показала, что расчет выполнен верно.

Прямой поперечный изгиб

Под изгибом понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникают изгибающие моменты (см. подразд. 2.1). Если изгибающий момент является единственным силовым фактором, а поперечные и нормальные силы отсутствуют, то такой изгиб называется **чистым**. В большинстве случаев в поперечных сечениях бруса наряду с изгибающими моментами возникают поперечные силы. В этом случае изгиб называют **поперечным**. Брус, работающий в основном на изгиб, называется балкой.

На балку могут действовать **сосредоточенные** силы и моменты, а также **распределенные** по длине. Например, на рис. 2.17 F — сосредоточенная сила, M — сосредоточенный момент; на участке a приложена распределенная нагрузка от нуля до $q_{\max}$.

Анализ внутренних силовых факторов начинают с определения полной системы внешних сил. Рассмотрим некоторые характерные примеры и установим правила определения изгибающих моментов и поперечных сил.

На рис. 2.18, а показана простейшая двухопорная балка, нагруженная силой F . Освобождаем балку от связей и заменяем их действие реакциями. Опора A представляет собой невесомый стержень, поэтому реакция R_A пойдет вдоль него. В шарнире B реакцию раскладываем на две составляющие. Несмотря на то, что выбор системы координат, безусловно, произволен, в сопротивлении материалов принято ось z направлять вдоль бруса; оси x и y должны лежать в плоскости, перпендикулярной этой оси, причем поворот от оси x к оси y должен происходить против хода часовой стрелки, если смотреть с конца оси z (рис. 2.18, б). Начало отсчета располагают в центре тяжести поперечного сечения. В этом случае оси x и y будут **главными центральными осями поперечного сечения**.

Составим уравнения равновесия для плоской системы сил и определим неизвестные реакции связей. Незвестных величин три — R_A , Y_B , Z_B . Уравнений статики тоже три, следовательно, задача статически определяемая:

$$\begin{aligned}\sum F_{iy} &= 0; & +R_A - F + Y_B &= 0; \\ \sum F_{iz} &= 0; & +Z_B &= 0; \\ \sum \text{mom}_B(\vec{F}_i) &= 0; & -R_A l + F(l - a) &= 0.\end{aligned}$$

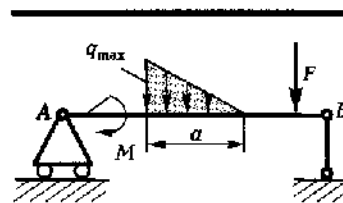


Рис. 2.17

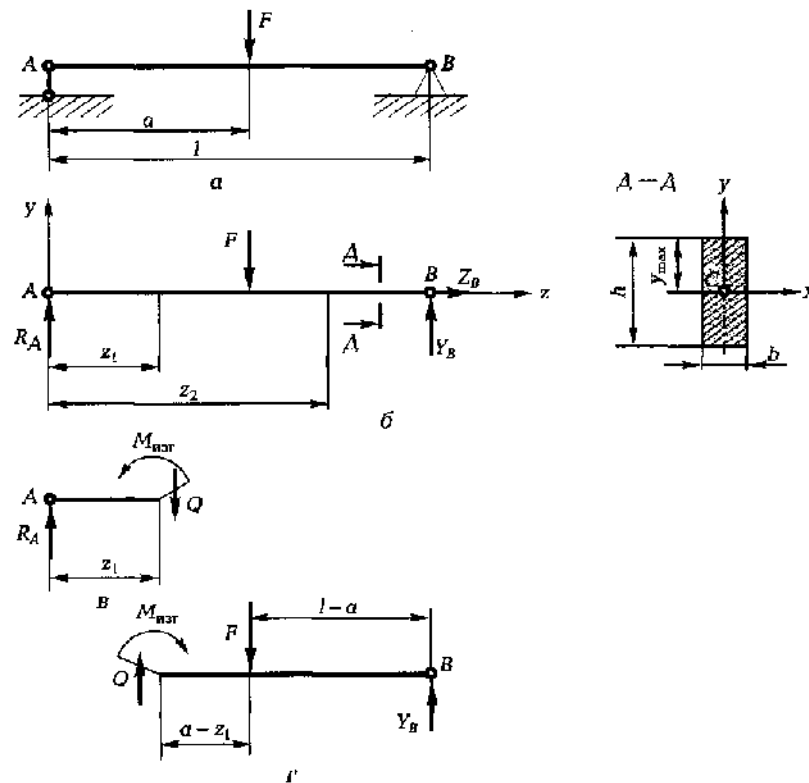


Рис. 2.18

Отсюда находим реакции опор

$$\begin{aligned} Z_B &= 0; \\ R_A &= F(l-a)/l; \\ Y_B &= Fa/l. \end{aligned}$$

Теперь приступим к выявлению внутренних силовых факторов в поперечных сечениях бруса. Для этого между точками приложения внешних сил и моментов, применяя метод сечений, мысленно разрезают балку на части (рис. 2.18, в и г) и составляют уравнения равновесия силовых факторов, приложенных к отсеченным частям. Так, в рассматриваемом примере необходимо делать сечения дважды: на расстоянии z_1 и z_2 от левой опоры. На рис. 2.18, в показано сечение бруса на расстоянии z_1 от левой опоры и проставлены внут-

ренние силовые факторы: изгибающий момент $M_{изг}$ и поперечная сила Q . Следует обратить внимание на то, чтобы внутренние силовые факторы в поперечном сечении в левой и правой (см. рис. 2.18, г) частях были обязательно противоположны по направлению.

Как уже известно, внутренние силовые факторы определяют из уравнений равновесия сил, приложенных к отсеченным частям. Следует условиться о знаках поперечных сил и моментов. Существует несколько способов определения знака изгибающего момента в поперечном сечении.

1. По знаку кривизны изогнутого бруса (рис. 2.19, а). Очевидно, знак будет зависеть от выбранной системы координат. Если ось y направить в противоположную сторону, то знаки $M_{изг}$ изменятся на противоположные.

2. Чаще всего при построении эпюр изгибающих моментов знак момента не зависит от выбранной системы отсчета, а ордината откладывается **на сжатом волокне**, т.е. в сторону вогнутости изогнутой оси бруса (рис. 2.19, б).

3. Если трудно представить, как будет выглядеть изогнутая ось бруса, то составляют сумму моментов нагрузок, действующих на левую отсеченную часть бруса.

Если равнодействующий момент всех нагрузок, действующих на левую часть, будет направлен по часовой стрелке, то ордината изгибающего момента откладывается на эпюре вверх (т.е. изгибающий момент $M_{изг}$ в поперечном сечении действует против часовой стрелки и, следовательно, брус изгибается вогнутостью вверх — ордината будет отложена на сжатом волокне).

Если же сумма моментов, действующих слева от сечения, направлена против часовой стрелки, то изгибающий момент на эпюре откладывается вниз (рис. 2.19, б).

Для сил, лежащих справа от сечения, имеет место обратная зависимость.

Правило определения знака для поперечных сил:

если равнодействующая внешних сил, лежащих по левую сторону от сечения, направлена вверх, то поперечная сила в сечении считается положительной, а если вниз, то поперечная сила отрицательна.

В сечении на расстоянии z_1 от начала координат, т.е. в левой части бруса от сечения (см. рис. 2.18, в), поперечная сила Q имеет положительный знак и на эпюре будет откладываться вверх. При

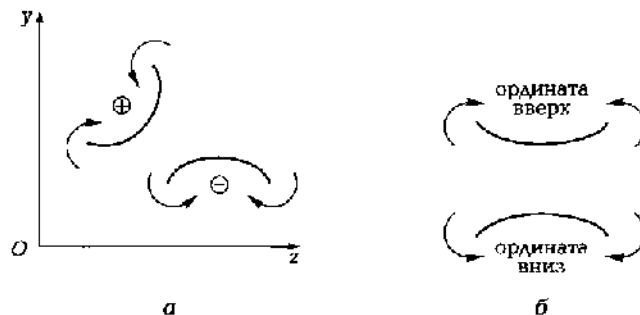


Рис. 2.19

рассмотрении равновесия правой отсеченной части для сил, лежащих справа от сечения, имеет место обратная зависимость. Чтобы легче усвоить правила определения знаков, желательно рассматривать равновесие, например, всегда левой части бруса.

Дифференциальная зависимость между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки. Правильность выбора знаков поперечных сил можно проверить, зная дифференциальную зависимость между изгибающим моментом и поперечной силой.

Пусть брус, закрепленный произвольным образом, нагружен в общем случае распределенной нагрузкой интенсивности $q = f(z)$ и находится в равновесии (рис. 2.20, а). Заданное направление для q — положительное. Выделим элемент бруса длиной dz и в сечениях приложим изгибающие моменты M и $M + dM$, а также поперечные силы Q и $Q + dQ$ (рис. 2.20, б). Направления для этих силовых факторов приняты положительными в соответствии с обусловленным ранее правилом знаков. В пределах малого отрезка dz нагрузку q можно считать распределенной равномерно. Поскольку рассматриваем элемент бруса, находящегося в равновесии, то составим ус-

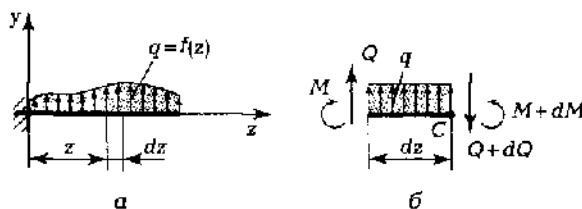


Рис. 2.20

ловия равновесия плоской системы сил: приравниваем к нулю сумму проекций всех сил на вертикальную ось и сумму моментов относительно точки C :

$$Q + g dz - Q - dQ = 0;$$

$$M + Q dz + g dz (dz/2) - M - dM = 0.$$

Откуда, отбросив величину высшего порядка малости $g dz (dz/2)$, получим

$$\frac{dQ}{dz} = q; \quad \frac{dM}{dz} = Q.$$

Таким образом,

поперечная сила представляет собой производную от изгибающего момента по длине бруса.

Производная от поперечной силы дает интенсивность внешней распределенной нагрузки q .

Из полученных дифференциальных зависимостей можно сделать некоторые общие выводы о характере эпюр изгибающих моментов и поперечных сил для прямого бруса.

Если брус нагружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q = \text{const}$, очевидно, функция Q будет линейной, а M — квадратичной.

Если брус нагружен сосредоточенными силами или моментами, а между точками их приложения интенсивность $q = 0$, то $Q = \text{const}$, а M является линейной функцией z . В точках приложения сосредоточенных сил эпюра Q претерпевает скачок на величину внешней силы, а в эпюре M возникает соответствующий излом (разрыв в производной).

Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил осуществляется в следующей последовательности: 1) определяют реакции опор; 2) выявляют в поперечных сечениях бруса все внутренние силовые факторы (их значение и знак); 3) строят эпюры. Построим эпюры для балки, представленной на рис. 2.18.

1. Определяем реакции опор.

Составляем уравнения равновесия плоской системы сил:

$$R_A = F(1 - a)/l; \quad Y_B = Fa/l.$$

2. Определяем внутренние изгибающие моменты в поперечных сечениях балки. Для этого рассматриваем равновесие отсеченной левой части (см. рис. 2.18, в):

в сечении z_1

$$\sum \text{mom}_B(\bar{F}_i) = 0; -R_A z_1 + M_{\text{изг}} = 0;$$

$$M_{\text{изг}} = R_A z_1 = \frac{F(l-a)}{l} z_1 \quad \text{для } 0 \leq z_1 \leq a;$$

в сечении z_2

$$\sum \text{mom}_B(\bar{F}_i) = 0; -R_A z_2 + F(z_2 - a) + M_{\text{изг}} = 0;$$

$$M_{\text{изг}} = R_A z_2 - F(z_2 - a) \quad \text{для } a \leq z_2 \leq l;$$

3. Определяем поперечные силы:

в сечении z_1

$$\sum F_{iy} = 0; R_A - Q = 0.$$

Отсюда $Q = R_A = F(l-a)/l$;

в сечении z_2

$$\sum F_{iy} = 0; R_A - F + Q = 0.$$

Отсюда $Q = Fa/l$.

4. Строим эпюры изгибающих моментов.

Эпюра $M_{\text{изг}}$ в пределах $0 \leq z_1 \leq a$ имеет линейную зависимость. Задаемся $z_1 = 0$, при этом $M_{\text{изг}} = 0$. Откладываем эту точку на эпюре (рис. 2.21). Далее при $z_1 = a$ $M_{\text{изг}} = F(l-a)a/l$.

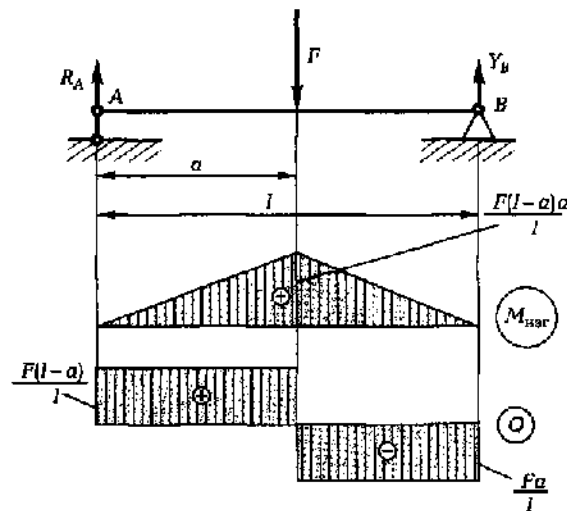


Рис. 2.21

В пределах $a \leq z_2 \leq l$ получаем: при $z_2 = a$ $M_{изг} = F(l - a)a/l$; при $z_2 = l$ $M_{изг} = 0$. Откладываем эти ординаты (они построены на сжатом волокне) и соединяем линиями. Следует заметить, что на втором участке можно было ординаты не вычислять, так как в шарнирной опоре B момент не может возникать, и поэтому на эпюре нужно сразу отложить 0.

5. Строим эпюры поперечных сил.

Как было определено в п. 3, поперечные силы постоянны на каждом из двух участков, поэтому откладываем подсчитанные значения с учетом знаков. Нужно обратить внимание, что в точке приложения внешней силы должен быть скачок, равный приложенной силе.

Кроме того, можно проверить правильность установленных знаков поперечных сил. Тангенс угла наклона линии $M_{изг}$ на эпюре изгибающих моментов показывает на знак поперечной силы. Если угол острый, то тангенс положительный (производная $dM/dt > 0$), а следовательно, и поперечная сила имеет знак «+». Если угол наклона линии с осью z тупой, то поперечная сила отрицательная. Сопоставьте построенные эпюры $M_{изг}$ и Q (см. рис. 2.21).

Напряжения в бруске при прямом чистом изгибе

Чистый изгиб в бруске может иметь место по всей длине бруска ab (рис. 2.22, *а*) или только на его части ab (рис. 2.22, *б*). Как уже указывалось, под чистым изгибом понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруска возникают только изгибающие моменты, а $Q = 0$, следовательно, изгибающий момент остается постоянным ($M_{изг} = \text{const}$, см. рис. 2.22, *а*).

Нанесем на брус ортогональную сетку, после чего приложим моменты M . Под действием внешних моментов M брус (рис. 2.23, *а*) изогнется. В случае однородного бруска изменение кривизны для всех участков будет одним и тем же. Все сечения (т. е. вертикальные линии нанесенной сетки) однородного бруска остались плоскими и нормальными к его оси после деформирования. Горизонтальные линии нанесенной сетки, расположенные на выпуклой стороне бруска, удлинились, а на вогнутой — стали короче. Очевидно, существует слой, в котором удлинение отсутствует; такой слой называют **нейтральным**.

Представим, что брус состоит из бесчисленного числа «волокон» и примем гипотезу о ненадавливании волокон друг на друга. Определим деформацию растянутого волокна, отстоящего от ней-

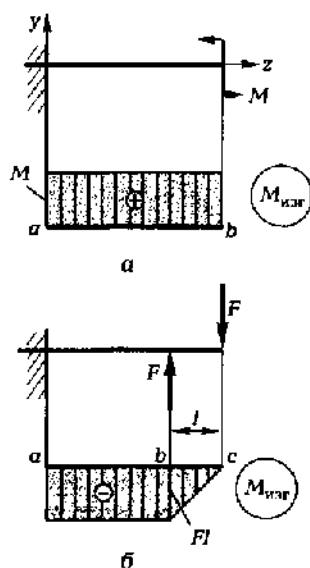


Рис. 2.22

трального слоя на расстоянии y . Пусть величина $AC = dz$, тогда растянутое волокно BD получит удлинение Δdz (рис. 2.23, б). Определим линейную деформацию волокна, отстоящего на расстоянии y от нейтрального слоя, если его радиус кривизны $\rho = OC$:

$$\epsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{BD - AC}{AC} = \frac{(\rho + y)d\phi - \rho d\phi}{\rho d\phi} = \frac{y}{\rho}.$$

Таким образом, линейная деформация при чистом изгибе прямо пропорциональна расстоянию y от нейтрального слоя и обратно пропорциональна радиусу кривизны.

По закону Гука

$$\sigma = E\epsilon = E \frac{y}{\rho}.$$

Итак, при чистом изгибе напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону. Геометрическое место точек в сечении, удовлетворяющее условию $\sigma = 0$, называется **нейтральной линией**. Нейтральная линия перпендикулярна к плоскости кривизны изогнутого бруса, на рис. 2.23, б ее проекция отмечена точкой C . Максимальное напряжение при изгибе возникает в точ-

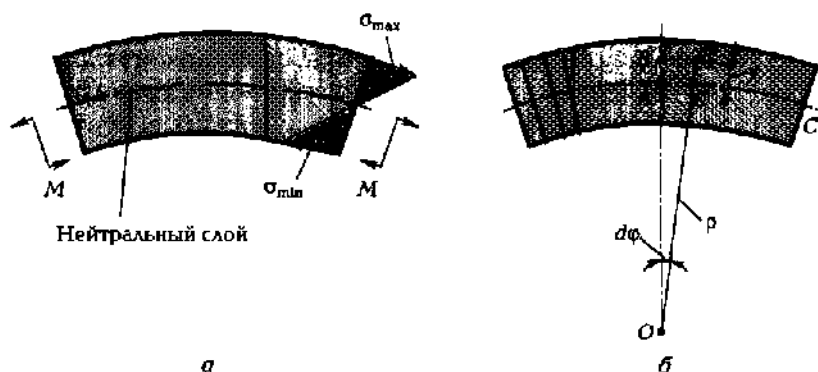


Рис. 2.23

ках поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии: $\sigma_{\max} = (E y_{\max})/\rho$ (см. рис. 2.23, а).

Покажем, что нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения. Напомним, что нормальная сила N в поперечном сечении бруса при чистом изгибе равна нулю:

$$N = \int_S \sigma dS = \int_S (E/\rho) y dS = 0.$$

Учитывая, что радиус кривизны и модуль упругости для данного поперечного сечения — величины постоянные, имеем

$$(E/\rho) \int_S y dS = 0, \text{ откуда}$$

$$\int_S y dS = 0.$$

Этот интеграл представляет собой статический момент сечения относительно нейтральной линии. Так как статический момент равен нулю, то нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения.

Зависимость между изгибающим моментом и кривизной бруса

Поскольку при чистом изгибе бруса внешний момент M действует в плоскости yz , то в сечениях бруса внутренние изгибающие моменты соответственно относительно осей x и y будут равны:

$$M_x = \int_S (\sigma dS) y = M; \quad M_y = \int_S (\sigma dS) x = 0.$$

Подставив вместо $\sigma = (E/\rho)y$, получаем

$$(E/\rho) \int_S y^2 dS = M; \quad (E/\rho) \int_S y x dS = 0.$$

Второе выражение приводится к виду $J_{xy} = 0$. Это означает, что изменение кривизны бруса происходит в плоскости действия внешнего момента M , которая обязательно проходит через одну из главных осей сечения. Такой изгиб называется **прямым**.

Если изменение кривизны бруса происходит в плоскости, в которой действует изгибающий момент, и эта плоскость проходит через главные оси сечения, то такой изгиб называется прямым.

Из первого выражения получаем зависимость кривизны бруса $1/\rho$ от изгибающего момента M и момента инерции сечения J_x относительно главной центральной оси, перпендикулярной к плоскости изгибающего момента:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x}.$$

Величина EJ_x называется **жесткостью бруса при изгибе**. Из этой зависимости получаем формулу для расчета напряжений при изгибе:

$$\sigma = \frac{My}{J_x}.$$

В точках, наиболее удаленных от нейтральной линии, возникает максимальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{J_x}.$$

Отношение $J_x/y_{\max}$ называется **моментом сопротивления сечения при изгибе** и обозначается W_x :

$$W_x = J_x/y_{\max}.$$

Например, для прямоугольного сечения

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad W_x = \frac{bh^2}{6},$$

где b — ширина; h — высота сечения;
для круглого поперечного сечения

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64}; \quad W_x = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1D^3,$$

где D — диаметр сечения.

Итак, при прямом чистом изгибе

$$\sigma_{\max} = M_{\text{изг}}/W_x.$$

Косым изгибом называется изгиб, при котором плоскость изгибающего момента не совпадает с главной осью сечения.

Расчет на прочность при прямом чистом изгибе по методике аналогичен расчетам на прочность при растяжении и кручении. Определяют напряжения в сечениях по длине бруса и из них (по эпюре напряжений) выбирают наибольшее, после чего из условия

$$\sigma_{\max \text{ изг}} \leq [\sigma]_{\text{р(сж)}}$$

определяют геометрические размеры поперечного сечения бруса.

Пример 2.11

Определить диаметр поперечного сечения круглого бруса, нагруженного изгибающим моментом $M = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (см. рис. 2.22, а), если допускаемое напряжение $[\sigma]_p = 160 \text{ Н/мм}^2$.

Решение.

1. Поскольку эпюра изгибающих моментов уже известна, а брус имеет постоянное поперечное сечение, то определяем требуемый момент сопротивления:

$$W_y = W_y = \frac{M_{\text{изг}}}{[\sigma]_p} = \frac{60\,000\,000}{160} = 375\,000 \text{ см}^3.$$

2. Определяем диаметр круглого бруса:

$$W_x = 0,1D^3; 375\,000 = 0,1D^3; D = 10\sqrt[3]{3\,750} = 155,4 \text{ мм}.$$

Пример 2.12

Для балки (см. рис. 2.22, б) подобрать сечение профиля швеллера, обеспечив при этом двукратный запас прочности при $F = 21\,000 \text{ Н}$, $l = 1 \text{ м}$, $\sigma_{т.р} = 30\,000 \text{ Н/см}^2$.

Решение.

1. Строим эпюру изгибающих моментов (см. рис. 2.22, б). Наибольший изгибающий момент возникает на участке чистого изгиба и равен Fl .

2. Вычисляем требуемый момент сопротивления W_x сечения швеллера:

$$|\sigma_{\text{изг}}| \leq [\sigma]_p = \sigma_{т.р}/n_T;$$

$$\frac{Fl}{W_x} \leq \frac{\sigma_{т.р}}{n_T} \text{ или } \frac{21\,000 \cdot 100}{W_x} \leq \frac{30\,000}{2},$$

откуда

$$W_x \geq \frac{21\,000 \cdot 100}{15\,000} = 140 \text{ см}^3.$$

3. В Приложении III приведена таблица стандартных профилей (ГОСТ 8240—97), по которой выбираем швеллер № 20У, у которого $W_x = 152 \text{ см}^3$.

Анализ выгодности формы поперечного сечения брусьев при изгибе

На рис. 2.24 показаны четыре бруса различных поперечных сечений, на которые действует одинаковый момент в плоскости yz . Рассмотрим сечения I и II. Исходя из эпюры σ мы видим, что внутренняя часть сечения I почти не нагружена. Поэтому брус сечения II

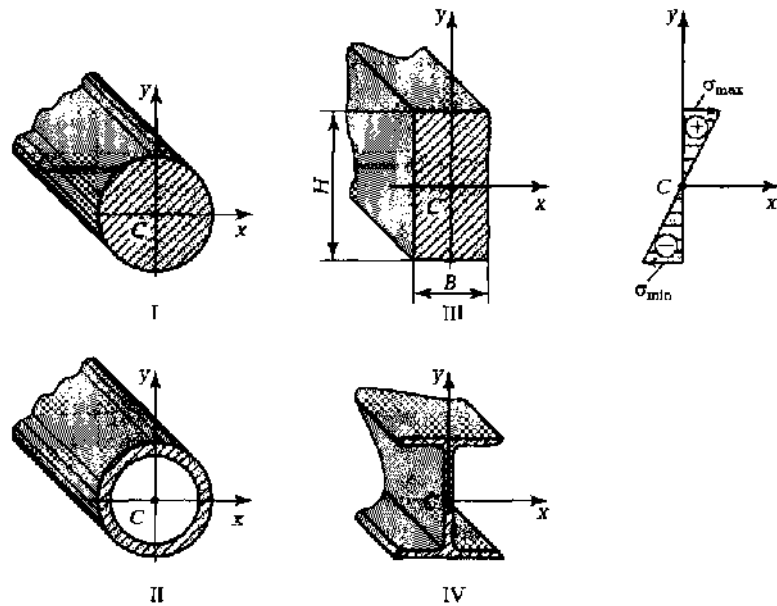


Рис. 2.24

при той же массе будет прочнее и более жестким, чем брус сечения I. При сравнении сечений III и IV складывается аналогичная картина: брус IV будет более прочным и жестким, чем брус III при той же массе. Однако при изгибе в плоскости xz брус IV уступает брусу II, который обладает одинаковой прочностью и жесткостью во всех направлениях; в этом его преимущество перед брусом IV.

Пример 2.13

Определить, как изменится кривизна бруса III (см. рис. 2.24) при изгибе моментом M в плоскостях yz и xz , если $H = 3B$.

Решение.

1. Определяем кривизну бруса при действии момента в плоскости yz :

$$\frac{1}{\rho_{yz}} = \frac{M}{EI_x} = \frac{M}{E(BH^3/12)}.$$

2. Определяем кривизну бруса при действии момента в плоскости xz :

$$\frac{1}{\rho_{xz}} = \frac{M}{EI_y} = \frac{M}{E(HB^3/12)}.$$

3. Вычислим отношение кривизн с учетом, что $H = 3B$:

$$\frac{1/\rho_{xz}}{1/\rho_{yz}} = \frac{H^2}{B^2} \approx 9.$$

Таким образом, мы численно подтвердили, что жесткость бруса с прямоугольным сечением в плоскости yz больше, чем в плоскости xz .

Напряжения при прямом поперечном изгибе

При чистом изгибе в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные напряжения, и соответствующие им внутренние силы вызывают в сечении равнодействующий изгибающий момент. В случае поперечного изгиба в сечении бруса действует не только момент, но и поперечная сила. Эта сила представляет собой равнодействующую элементарных распределенных сил, лежащих в плоскости сечения. В этом случае в поперечных сечениях бруса возникают не только нормальные, но и касательные напряжения.

Возникновение касательных напряжений τ сопровождается появлением угловых деформаций γ . Поэтому на ортогональной сетке, нанесенной до нагружения бруса, вертикальные линии (а следовательно, и сечения) не остаются прямолинейными после приложения нагрузки. Каждая элементарная площадка сечения dS получает еще дополнительные угловые смещения, обусловленные сдвигом. Так как касательные напряжения распределены по сечению неравномерно, то так же неравномерно будут распределены и угловые смещения.

На величине нормальных напряжений σ искажение плоскости поперечных сечений заметным образом не сказывается. В частности, если поперечная сила Q не меняется по длине бруса, формулы, выведенные для чистого изгиба,

$$\sigma = \frac{My}{J_x} \text{ и } \sigma_{\max} = \frac{M}{W_x}$$

будут давать совершенно точные результаты и в случае поперечного изгиба.

Действительно, при $Q = \text{const}$ искривление всех сечений происходит одинаково, поэтому при взаимном повороте двух смежных сечений удлинение продольного волокна BD (см. рис. 2.23) будет одним и тем же, независимо от того, осталось сечение плоским или нет.

Если поперечная сила меняется вдоль оси бруса, формулы чистого изгиба дают при определении σ некоторую погрешность. Величина этой погрешности порядка H/l (H — размер поперечного сечения, l — длина бруса, которая значительно больше, чем H); величина H/l весьма мала, поэтому малой оказывается указанная погрешность.

Сказанное дает основание принять *гипотезу плоских сечений*.

Второй особенностью поперечного изгиба является наличие нормальных напряжений, возникающих в продольных сечениях бруса, т. е. напряжений «надавливания» между волокнами. Эти напряжения возникают при поперечной силе Q и имеют весьма малую величину. Поэтому формулы, выведенные для определения нормальных напряжений σ и $\sigma_{\max}$, а также для кривизны $1/\rho$ при чистом изгибе, будут применимы и для поперечного изгиба, и для случая, когда поперечная сила Q изменяется вдоль оси бруса.

При расчетах на прочность при поперечном изгибе балки следует помнить, что касательные напряжения достигают максимума в нейтральном слое, где нормальное напряжение равно нулю. Для сплошных сечений (прямоугольного и круглого) касательными напряжениями при расчетах пренебрегают. Можно привести соотношение максимальных нормальных и касательных напряжений, возникающих в поперечных прямоугольных сечениях бруса:

$$\tau_{\max}/\sigma_{\max} = H/(4l),$$

где H — размер поперечного сечения бруса; l — длина бруса.

При расчете на прочность тонкостенных профилей при поперечном изгибе следует учитывать касательные напряжения $\tau_{\max}$; их эпюры и значения для поперечных сечений различной формы приводятся в работах [1, 11].

2.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

Дифференциальное уравнение изогнутой упругой линии балки

Пусть к консоли бруса приложена сила F (рис. 2.25); форму его изогнутой оси (или упругой линии) можно определить при помощи выражения для радиуса кривизны:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{\text{изг}}}{EJ_x}.$$

Известно, в неподвижной системе координат zy кривизна кривой связана с производными функции y следующей зависимостью:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\sqrt{[1 + (y')^2]^3}}.$$

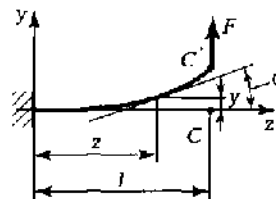


Рис. 2.25

Мы рассматриваем весьма жесткие брусья, поэтому y' , равная $\operatorname{tg} \alpha$, величина небольшая. Например, $\alpha = 5^\circ$, $\operatorname{tg} 5^\circ = 0,0875$, $(\operatorname{tg} 5^\circ)^2 = 0,00765$. Такая величина пренебрежимо мала по сравнению с 1. Поэтому можем принять $1/\rho \approx y''$.

Тогда y'' — это кривизна изогнутой оси бруса, y' — тангенс угла наклона касательной к упругой линии бруса (в силу малости угла можно считать, что y' — это угол α , на который повернется сечение), $y = f(z)$ — прогиб упругой линии.

Итак,

$$y'' = \frac{M_{изг}}{EJ_y}.$$

Перепишем полученную зависимость, уточнив, что изгибающий момент $M_{изг}$ приложен в плоскости zy :

$$y'' = \frac{M_{zy}}{EJ_x},$$

или

$$EJ_x y'' = M_{zy}.$$

Полученное выражение представляет собой **дифференциальное уравнение изогнутой оси** балки (упругой линии балки).

Пример 2.14

Для бруса, показанного на рис. 2.26, требуется определить прогиб в точке B и углы поворота опорных сечений. Принять: $l = 5$ м, $q = 800$ Н/м, $J_x = 166$ см⁴, $E = 2 \cdot 10^5$ Н/мм², $AB = l/2$.

Решение.

1. Определяем реакции опор

$$\sum \operatorname{mom}_C(\bar{F}_i) = 0; -Y_A l + ql \cdot l/2,$$

$$\text{откуда } Y_2 = ql/2;$$

$$\sum R_{iy} = 0; Y_A + Y_C - ql = 0,$$

$$\text{откуда } Y_A = Y_C = ql/2;$$

$$\sum F_{iz} = 0; Z_A = 0.$$

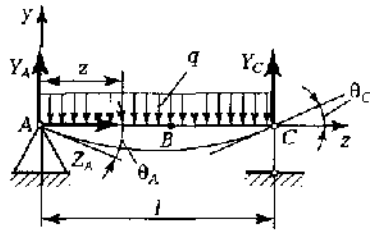


Рис. 2.26

2. Проводим оси координат, выбрав начало отсчета на левой опоре А.

3. Определяем изгибающий момент в произвольном сечении бруса, отстоящем на расстоянии z от левой опоры.

Весь пролет бруса представляет собой один участок. Записываем сумму моментов относительно центра тяжести сечения, рассматривая равновесие левой отсеченной части:

$$M_{изг} = Y_A z - qz^2/2, \quad 0 \leq z \leq l.$$

4. Составляем дифференциальное уравнение упругой линии балки:

$$EJ_x y'' = M_{изг}; \quad EJ_x y'' = Y_A z - qz^2/2 = (ql/2)z - qz^2/2.$$

5. Проинтегрировав, найдем зависимость для определения углов поворота опорных сечений:

$$EJ_x y' = (ql/4)z^2 - qz^3/6 + D_1.$$

При $z = 0$ $y' = \theta_A$: $EJ_x \theta_A = 0 - 0 + D_1$; $\theta_A = D_1/(EJ_x)$;

при $z = l$ $y' = \theta_C$: $EJ_x \theta_C = ql^3/4 - q^3/6 + D_1$; $\theta_C = (ql^3/12 + D_1)/(EJ_x)$.

Постоянная интегрирования D_1 после первого интегрирования пока неизвестна.

6. Проинтегрируем еще раз и найдем функцию для определения прогибов:

$$EJ_x y = (1/12)qlz^3 - (1/24)qz^4 + D_1 z + D_2.$$

В полученную зависимость проставляем граничные условия для определения постоянных интегрирования D_1 и D_2 .

При $z = 0$ $y = 0$: $0 = 0 - 0 + 0 + D_2$, откуда $D_2 = 0$;

при $z = l$ $y = 0$: $0 = (1/12)ql^3 - (1/24)ql^4 + D_1 l$, откуда $D_1 = -(1/24)ql^3$.

7. Запишем уравнения для определения угловых перемещений и прогибов сечений балки в окончательном виде:

$$EJ_x y' = (ql/4)z^2 - qz^3/6 - (1/24)ql^3;$$

$$EJ_x y = (1/12)qlz^3 - (1/24)qz^4 - (1/24)ql^3 z.$$

8. Определяем прогиб в точке В — f_B .

В уравнение прогибов подставляем координату точки В ($z = l/2$):

$$f_B = (1/(EJ_x)) \left[(1/12)ql(l/2)^3 - (1/24)q(l/2)^4 - (1/24)ql^3(l/2) \right],$$

откуда $f_B = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_x}$.

Подставляем исходные данные: $l = 5 \text{ м} = 5\,000 \text{ мм}$, $q = 800 \text{ Н/м} = 0,8 \text{ Н/мм}$, $J_x = 166 \text{ см}^4 = 166 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$:

$$f_B = -\frac{5}{384} \frac{0,8 \cdot 5\,000^4}{2 \cdot 100\,000 \cdot 166 \cdot 10\,000} = -19,6 \text{ мм.}$$

Знак «-» означает, что балка прогнулась вниз (положительное направление оси координат y — вверх).

9. Определяем угол поворота опорного сечения θ_A .

В уравнение угловых перемещений подставляем $z = 0$:

$$\theta_A = \left(1/(EI_x)\right)(-1/24)ql^3 = -\left(1/(\pi EI_x)\right)(-1/24)ql^3.$$

Подставляем исходные данные: $l = 5\,000 \text{ мм}$, $q = 0,8 \text{ Н/мм}$, $J_x = 166 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$:

$$\theta_A = -\frac{1}{24} \frac{0,8 \cdot 5\,000^3}{2 \cdot 100\,000 \cdot 166 \cdot 10\,000} = -0,0125 \text{ рад.}$$

Угол получился отрицательный, так как находится в четвертом квадранте.

10. Определяем угол поворота опорного сечения θ_C .

В уравнение угловых перемещений подставляем $z = l$:

$$\theta_C = \left(1/(EI_x)\right)(ql^3/4 - ql^3/6 - ql^3/24) = \left(1/(EI_x)\right)(ql^3/24).$$

Сечение над опорой C повернулось на такой же угол, как и сечение над опорой A , вследствие симметрии приложенных к балке нагрузок; знак — положительный, так как угол по отношению к оси z острый.

Определение перемещений способом Верещагина

Чтобы определить перемещение любой точки балки, необходимо:

1. Построить эпюру $M_{изг}$ от реально приложенных силовых факторов.
2. Приложить единичный силовой фактор (силу или момент) в точке, где необходимо определить перемещение поперечного сечения балки.
3. Построить эпюру изгибающих моментов от единичного силового фактора.
4. Перемножить площадь эпюры $M_{изг}$ на ординату, взятую с эпюры от единичного силового фактора под центром тяжести площади эпюры $M_{изг}$.
5. Полученное произведение разделить на жесткость поперечного сечения балки EJ .

Пример 2.15

Определить прогиб в точке K балки, нагруженной силой F (рис. 2.27).

Решение.

1. Строим эпюру $M_{изг}$.
2. Прикладываем единичную силу в точке K и строим эпюру изгибающих моментов от этой силы; в заделке изгибающий момент равен $1 \cdot l = l$.
3. Определяем площадь эпюры $M_{изг}$ и положение ее центра тяжести C :

$$S_{эп} = (1/2)Fl = Fl^2/2; x_C = l/3.$$

4. Вычисляем ординату на эпюре изгибающих моментов от единичной силы, взятую под центром тяжести C :

$$-1 \cdot (2/3)l = -(2/3)l.$$

5. Определяем прогиб в точке K :

$$y_K = (1/(EJ))(Fl^2/2)(-2/3)l = -Fl^3/(3EJ).$$

Если эпюра заданных сил линейная, то операция перемножения обладает свойством **коммутативности**. В этом случае безразлично, умножается ли площадь первой эпюры на ординату второй или площадь второй эпюры на ординату первой.

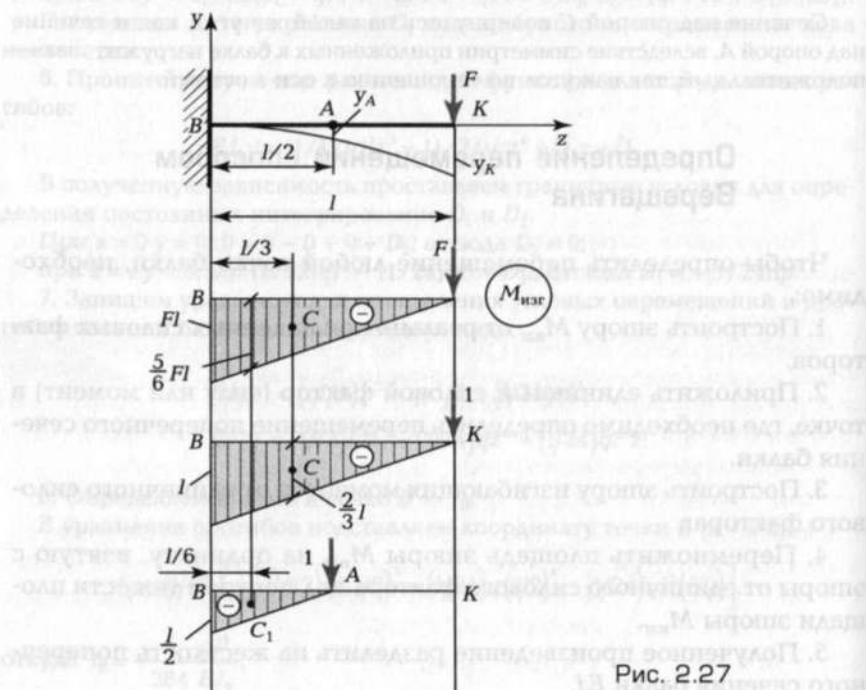


Рис. 2.27

Пример 2.16

Определить прогиб в точке А балки, рассмотренной в примере 2.15.

Решение.

1. Приложим единичную силу в точке А и построим эпюру изгибающих моментов от этой силы.

2. Подсчитаем площадь эпюры изгибающих моментов от единичной силы и координату ее центра тяжести:

$$S_{\text{эп}} = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = l^2/8; z_{C1} = 1/3 \cdot 1/2 = 1/6.$$

3. Вычислим ординату на эпюре $M_{\text{изг}}$ под центром тяжести C_1 . Ордината отрицательна и равна

$$-F(l - 1/6) = (-5/6)Fl.$$

4. Воспользовавшись свойством коммутативности, определяем прогиб балки в точке А. На участке АК площадь эпюры моментов от единичной силы равна нулю, поэтому результат перемножения эпюр также равен нулю. Следовательно, будем «перемножать» эпюры только на участке АВ:

$$y_A = (1/(EJ))(l^2/8)(-5/6)Fl = -\frac{5}{48} \frac{1}{EJ} Fl^3.$$

Таким образом, прогиб в точке А в три раза меньше, чем в точке К.

Использование свойства коммутативности значительно упрощает определение прогибов. Иначе в приведенном ранее примере пришлось бы определять площадь трапеции на эпюре изгибающих моментов $M_{\text{изг}}$ (так как эпюры от единичной силы на участке от $l/2$ до l не существует), затем определять положение центра тяжести этой трапеции, что более затруднительно, чем определять положение центра тяжести треугольника.

Встречающиеся на практике эпюры изгибающих моментов, как правило, разбивают на простейшие фигуры: прямоугольник, треугольник, параболический треугольник (рис. 2.28), для которых площадь и положение центра тяжести известны. При разбивке следует помнить, что в пределах участка не должно быть излома прямой линии. Сечение, где на любой из двух эпюр имеется излом, должно стать границей участка.

При кручении, растяжении и сдвиге эпюры оказываются более простыми: они, как правило, линейные и состоят из прямоугольников и треугольников в различных комбинациях. Разница заключается в том, что в знаменатель формул для определения перемещений входит не жесткость EJ , как при изгибе, а жесткость GJ_p , если речь идет о кручении, либо ES или GS — при растяжении и сдвиге.

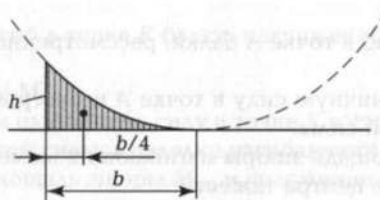


Рис. 2.28

Если эпюра изгибающих моментов ограничена кривой, то площадь под параболой определяется по формуле

$$S = (1/3)hb,$$

а центр тяжести находится на расстоянии, равном $(1/4)b$ (см. рис. 2.28).

Способ Верещагина применим для определения не только линейных перемещений, но и угловых. При определении угла поворота поперечного сечения при кручении бруса следует приложить в данном сечении единичный крутящий момент; при определении поворота поперечного сечения балки при изгибе необходимо приложить единичный изгибающий момент в плоскости изогнутой оси балки и в той точке сечения, перемещение которого необходимо определить.

2.9. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

Напряженное состояние в точке

Положим, что тело, на которое действует система сил, находится в равновесии, следовательно, каждая точка этого тела также находится в равновесии, но в напряженном состоянии. Применяя метод сечений, можно вырезать элементарный объем в виде куба, призмы или тетраэдра. С поворотом площадок этих элементарных объемов в определенной зависимости будут меняться и напряжения.

Совокупность напряжений, возникающих во множестве площадок, проходящих через рассматриваемую точку, называется **напряженным состоянием в точке**.

Будем считать, что при переходе от точки к точке напряженное состояние меняется достаточно медленно. Значит, можно выбрать

в окрестности точки такую достаточно малую область, для которой напряженное состояние можно рассматривать как однородное (т. е. свойства материала не будут зависеть от выделенного объема). В качестве модели точки изобразим элементарный куб, стороны которого соответственно равны dx , dy и dz (рис. 2.29). Полное напряжение, возникающее на секущей площадке, может быть разложено на три составляющие: по нормали к площадке и две составляющие в плоскости сечения. Нормальное напряжение обозначаем σ с индексом x , y или z . Касательное напряжение обозначим буквой τ с двумя индексами: первый соответствует оси, перпендикулярной площадке, а второй — оси, вдоль которой направлен вектор $\vec{\tau}$.

Система сил, приложенных к элементу, должна удовлетворять условиям равновесия. Поскольку на противоположных гранях элементарного куба возникают равные по модулю, но противоположно направленные силы, то первые три условия равновесия удовлетворяются тождественно, и суммы проекций всех сил на оси x , y и z равны нулю, независимо от величины возникающих напряжений. Остается проверить, обращаются ли в нуль суммы моментов всех сил относительно осей x , y и z . При составлении уравнений равновесия легко обнаружить, что момент каждой нормальной силы уравновешивается моментом силы, приложенной к противоположащей грани. Рассмотрим моменты касательных сил. Например, для оси x условие равенства нулю суммы моментов соблюдается в том случае, если момент силы $\tau_{yz}dx dz$ равен моменту силы $\tau_{zy}dx dy$, т. е.

$$\tau_{yz}dx dz dy = \tau_{zy}dx dy dz.$$

Аналогично могут быть записаны еще два уравнения равновесия. Тогда получаем, что

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Полученные зависимости представляют собой закон парности касательных напряжений:

на двух взаимно-перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к общему ребру, равны и направлены обе либо к ребру, либо от ребра.

Закон парности справедлив для всех точек нагруженного тела неза-

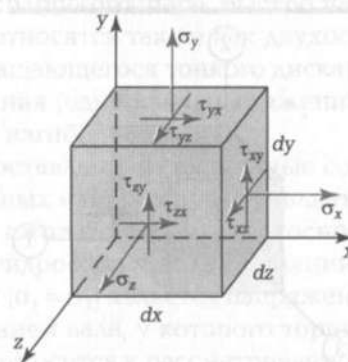


Рис. 2.29

висимо от вида приложенных нагрузок и свойств материала. Следствием из закона парности касательных напряжений является то, что на гранях выделенного элемента (см. рис. 2.29) имеем не девять, а шесть независимых компонентов напряжений, поскольку касательные напряжения попарно равны.

Напряжения в трех взаимно-перпендикулярных сечениях вполне определяют напряженное состояние точки; по ним можно определить напряжение в любой площадке, проходящей через данную точку.

Если от элементарного куба произвольно наклоненной плоскостью отсечь тетраэдр, то, зная площадь этой наклонной плоскости S и ее проекции на отсеченные грани куба, можно определить направляющие косинусы l , m и n нормали этой наклонной плоскости. Далее, проецируя все силы, действующие на элементарную наклонную площадку, получим

$$X = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n; \quad Y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n; \quad Z = \tau_{xx} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n,$$

где X , Y и Z — составляющие вектора полного напряжения на элементарной наклонной площадке. Таким образом, для любой площадки, определяемой направляющими косинусами l , m и n , проекции вектора полного напряжения выражаются через шесть исходных компонентов σ_x , σ_y , σ_z , τ_{yx} , τ_{zx} и τ_{xy} .

Главные оси и главные напряжения

Путем поворота осей координат можно добиться, что касательные напряжения τ_{yx} , τ_{zx} и τ_{xy} обратятся в нуль. Такие оси называются **главными осями**. Соответствующие им взаимно-перпендикулярные площадки называются **главными площадками**, а нормальные напряжения на них — **главными напряжениями**.

На рис. 2.30 изображен элементарный объем, выделенный при помощи главных площадок, на которых $\tau_{12} = \tau_{21} = 0$, $\tau_{23} = \tau_{32} = 0$, $\tau_{31} = \tau_{13} = 0$. Главные напряжения принято обозначать σ_1 , σ_2 и σ_3 в порядке убывания их значений. Итак, σ_1 — максимальное, σ_3 — минимальное, а σ_2 — промежуточное главные напряжения.

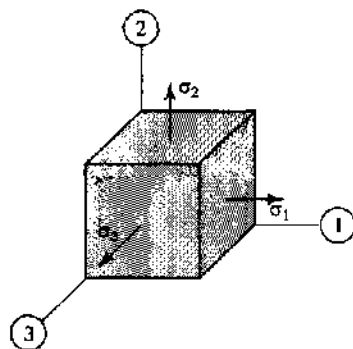


Рис. 2.30

Главные напряжения $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$ выражаются через исходные напряжения:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

Обзор различных типов напряженных состояний

Если только одно из главных напряжений отлично от нуля, то такое напряженное состояние называется **одноосным**. Примерами являются напряженные состояния при растяжении (сжатии), чистом изгибе.

Напряженное состояние, при котором одно из главных напряжений равно нулю, называется **двухосным**, или **плоским**. В частности, напряженное состояние чистого сдвига представляет собой двухосное напряженное состояние, для которого

$$\sigma_1 = -\sigma_2 \text{ и } \sigma_3 = 0.$$

Напряженное состояние, при котором ни одно из главных напряжений не обращается в нуль, называется **трехосным**.

Все напряженные состояния в зависимости от знака главных напряжений принято делить на три класса. К первому классу относятся напряженные состояния, при которых все три главных напряжения положительные; такое напряженное состояние называется **трехосным растяжением**. В частном случае, когда все три главных растягивающих напряжения равны, напряженное состояние называется **чистым трехосным растяжением**. Оно возникает, например, в центральной части сплошного шара, быстро нагреваемого снаружи. К этому классу относятся также как двухосные (двухосное растяжение быстровращающегося тонкого диска), так и одноосные напряженные состояния (одноосное растяжение однородного стержня или его чистый изгиб).

Второй распространенный класс составляют напряженные состояния, при которых ни одно из главных напряжений не является растягивающим — это **трехосное сжатие**. Чистое трехосное сжатие возникает при всестороннем гидростатическом давлении. Примером двухосного равного сжатия ($\sigma_1 = \sigma_2$) является напряженное состояние при нагружении давлением вала, у которого торцы свободные. Одноосное сжатие также относится к рассматриваемому классу (сжатие однородного стержня).

К третьему классу относятся так называемые смешанные напряженные состояния, в которых наибольшее и наименьшее из главных напряжений имеют разные знаки. Напряжение σ_2 может быть как положительным, так и отрицательным. Такое напряженное состояние возникает, например, при нагружении толстостенного цилиндра внутренним давлением. Для изгибаемого и одновременно закручиваемого бруса характерно возникновение двухосного смешанного напряженного состояния. Чистый сдвиг также представляет собой смешанное двухосное напряженное состояние.

Гипотезы теории предельных напряженных состояний (гипотезы прочности)

Основная задача теории прочности — сравнение различных напряженных состояний между собой с точки зрения их опасности для разрушения материала.

Под **предельным напряженным состоянием** понимается такое, при котором происходит качественное изменение свойств материала — переход от одного механического состояния к другому. Для пластичного материала предельным обычно считается напряженное состояние, соответствующее возникновению заметных остаточных деформаций, а для хрупкого — такое, при котором начинается разрушение материала.

Предельное напряженное состояние может рассматриваться как характеристика свойств материала. Когда ведется расчет конструкции на прочность по максимальным напряжениям, напряженное состояние в наиболее опасной точке сопоставляется с предельным для данного материала. На основании этого сопоставления делается вывод о надежности конструкции.

В случае одноосного напряженного состояния задача решается весьма просто. Материал испытывают на растяжение. На диаграмме растяжения выбирают характерную точку, соответствующую предельному напряжению данного материала. Обычно в качестве предельного напряжения выбирают либо предел текучести $\sigma_{т.р.}$, либо предел прочности $\sigma_{з.р.}$. Аналогичным образом можно поступить и в случае чистого сдвига.

Если следовать этой методике, то в каждом напряженном состоянии ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) нужно было бы для каждого материала иметь соответствующие диаграммы испытания с числовыми характеристиками предельных точек. Такой подход к решению вопроса является

совершенно неприемлемым: во-первых, в силу неограниченного числа возможных типов напряженных состояний; во-вторых, в связи с чисто техническими затруднениями, возникающими при постановке испытаний материалов.

Из сказанного вытекает вывод, что необходимо создать общий метод оценки меры опасности сложного напряженного состояния при ограниченном числе механических испытаний материала.

Введем некоторые понятия, которые понадобятся при дальнейшем рассмотрении гипотез прочности.

Обобщим понятие «коэффициент запаса». Положим, задано некоторое напряженное состояние. Если увеличивать пропорционально все компоненты этого напряженного состояния, т. е. изменять его подобным образом, то рано или поздно напряженное состояние станет предельным. Условимся под коэффициентом запаса в данном напряженном состоянии понимать число, показывающее, во сколько раз следует одновременно увеличить все компоненты напряженного состояния, чтобы оно стало предельным. Из данного определения как частный случай вытекает уже известное определение коэффициента запаса при простом растяжении.

Если в двух напряженных состояниях коэффициенты запаса равны, то такие напряженные состояния называются **равноопасными**. Это дает возможность сопоставлять различные напряженные состояния по степени их опасности — по значению коэффициента запаса.

Для заданного материала сравнивать напряженные состояния можно не по коэффициенту запаса, а по числовой характеристике какого-либо одного напряженного состояния, выбираемого в качестве эталона. За такой эталон (эквивалент) удобнее всего принять простое растяжение с главным напряжением $\sigma_{\text{экв}}$ (рис. 2.31).

Эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв}}$ — это напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние было равноопасно с заданным.

Если величина $\sigma_{\text{экв}}$ найдена, т. е. выражена через σ_1 , σ_2 и σ_3 , то задачу о мере опасности сложного напряженного состояния можно считать решенной. Например, коэффициент запаса при растяжении (состояние В на рис. 2.31, б) определяется следующим образом:

$$n_T = \sigma_{Tp} / \sigma_{\text{экв}}.$$

Такую же величину коэффициента запаса определяют и для случая сложного напряженного состояния А (см. рис. 2.31, а). Таким образом, задача о расчете по максимальным напряжениям в сложном напряженном состоянии сведется к расчету при простом растя-

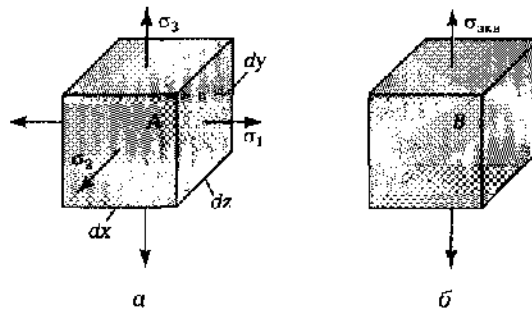


Рис. 2.31

жении, но при этом необходимо знать, как $\sigma_{\text{экв}}$ зависит от σ_1 , σ_2 и σ_3 . Для этого рассмотрим некоторые гипотезы предельных состояний.

Критерии предельного напряженного состояния. Когда возникла необходимость вести расчеты на прочность при сложных напряженных состояниях, в качестве критерия было предложено брать величину **наибольшего нормального напряжения** σ_1 и не учитывать два других главных напряжения. Это была первая теория прочности. Практическая проверка не подтвердила этой гипотезы.

Далее было предложено использовать в качестве критерия предельного состояния **наибольшую линейную деформацию**. Однако во второй теории прочности детальная проверка обнаружила ряд существенных недостатков.

Третья гипотеза прочности в качестве критерия предельного состояния принимает **наибольшее касательное напряжение** в точке. Этот критерий иногда называют критерием пластичности, так как пластические деформации начинаются, когда максимальные касательные напряжения достигают предельной величины.

Максимальное касательное напряжение возникает на площадках, равнонаклоненных к площадкам наибольшего и наименьшего главных напряжений, и равно

$$\tau_{\text{max}} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2.$$

Тогда для напряженного состояния В (см. рис. 2.31, б), при котором $\sigma_3 = 0$, максимальное касательное напряжение будет равно

$$\tau_{\text{max}} = \sigma_{\text{экв}}/2.$$

Два напряженных состояния будут равноопасны, если у них одинаковое τ_{max} . Приравнявая правые части равенств, получим

$$(\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \sigma_{\text{экв}}/2.$$

Таким образом, мы нашли зависимость между эквивалентным и главными напряжениями:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

Экспериментальная проверка показала, что для пластичных материалов гипотеза максимальных касательных напряжений приводит к удовлетворительным результатам. Однако она обнаруживает заметные погрешности для материалов, имеющих различные механические характеристики при растяжении и сжатии. Кроме того, недостатком этой теории прочности является то, что при вычислении $\sigma_{\text{экв}}$ не учитывается промежуточное σ_2 .

Пример 2.17

Найти коэффициент запаса прочности валика, к которому приложена растягивающая сила $F = 31\,400$ Н и крутящий момент $M = 79$ Н·м (рис. 2.32, а), если диаметр валика $d = 20$ мм, а $\sigma_{\text{т.р}} = 200$ Н/мм².

Решение.

1. Определяем напряженное состояние в точке А, взятой на наружной поверхности валика (рис. 2.32, б).

Методом сечений выделяем элементарный объем в виде куба. На грани, перпендикулярной линии действия силы F , действуют нормальное напряжение σ_x и касательное напряжение τ_{xy} . В силу закона парности касательных напряжений на грани, перпендикулярной оси y , проставляем касательные напряжения τ_{yx} . Грань с точками — наружная, поэтому на ней никаких напряжений нет. Следовательно, грань, на которой касательное напряжение равно нулю, будет одной из главных граней, и теперь известно, что одно из главных напряжений также равно нулю. Имеет место двухосное (или плоское) напряженное состояние.

На задних гранях в силу условий равновесия сил, приложенных к элементарному объему, напряжения будут аналогичными.

2. Вычисляем напряжения на гранях, перпендикулярных осям x и y :

$$\sigma_x = F/S = 31\,400 / (\pi d^2/4) = 100 \text{ Н/мм}^2;$$

$$\tau_{xy\text{max}} = \tau_{yx\text{max}} = M_{\text{кр}}/N_p = 79 \cdot 1\,000 / (\pi d^3/16) = 50 \text{ Н/мм}^2.$$

3. Определяем максимальное и минимальное главные напряжения:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{100 + 0}{2} + \sqrt{\left(\frac{100 - 0}{2}\right)^2 + 50^2} = 120,7 \text{ Н/мм}^2;$$

$$\sigma_{\text{min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{100 + 0}{2} - \sqrt{\left(\frac{100 - 0}{2}\right)^2 + 50^2} = -20,7 \text{ Н/мм}^2.$$

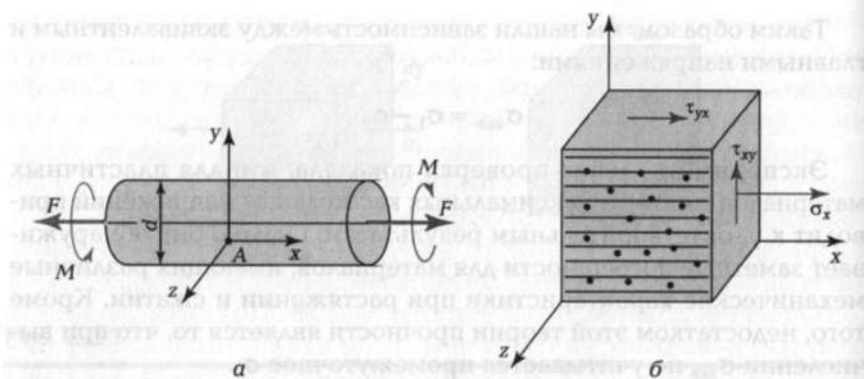


Рис. 2.32

Следовательно, на площадке, перпендикулярной оси z , ранее определенное напряжение было промежуточным.

Итак, $\sigma_1 = 120,7 \text{ Н/мм}^2$, $\sigma_2 = 0$, а $\sigma_3 = -20,7 \text{ Н/мм}^2$.

4. Вычисляем эквивалентное напряжение:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 120,7 - (-20,7) = 141,4 \text{ Н/мм}^2.$$

5. Определяем коэффициент запаса прочности:

$$n_r = \sigma_{\text{т.р}} / \sigma_{\text{экв}} = 200 / 141,4 = 1,41.$$

Критерием предельного состояния в четвертой теории прочности (ее иногда называют энергетической) принята потенциальная энергия W_Φ формоизменения:

$$W_\Phi = [(1 + \mu)/(6E)] [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Для одноосного растяжения это выражение имеет вид

$$W_\Phi = [(1 + \mu)/(6E)] 2\sigma^2,$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Из условия равноопасности определяется $\sigma_{\text{экв}}$. Для этого приравняем правые части двух последних уравнений

$$[(1 + \mu)/(6E)] [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = [(1 + \mu)/(6E)] 2\sigma_{\text{экв}}^2,$$

отсюда

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{(1/2) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}.$$

Полученная зависимость применима к оценке предельных состояний пластичных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Расчет бруса на совместное действие кручения и изгиба

Большинство вращающихся валов работают при совместном действии изгибающих и крутящих моментов (например, валы редукторов и коробок скоростей). На рис. 2.33, а показан вращающийся вал, к которому приложен крутящий $M_{кр}$ и изгибающий $M_{изг}$ моменты. Рассмотрим напряженное состояние точки А, находящейся на поверхности вала.

В сечении, проходящем через точку А, возникают нормальные σ (от действия $M_{изг}$) и касательные τ (от действия $M_{кр}$) напряжения. Поскольку момент $M_{изг}$ приложен в вертикальной плоскости, то в точке А возникает максимальное нормальное напряжение, а в точке В — нормальное напряжение равно нулю (рис. 2.33, б). Максимальное касательное напряжение действует в обеих точках. Следовательно, наиболее опасное напряженное состояние в точке А. Выделим около точки А элемент кубической формы (рис. 2.33, в) и рассмотрим его напряженное состояние. Грань с точками — наружная, поэтому на ней отсутствуют напряжения: касательное напряжение равно нулю, следовательно, эта грань является главной; одно из главных напряжений равно нулю — имеет место плоское напряженное состояние.

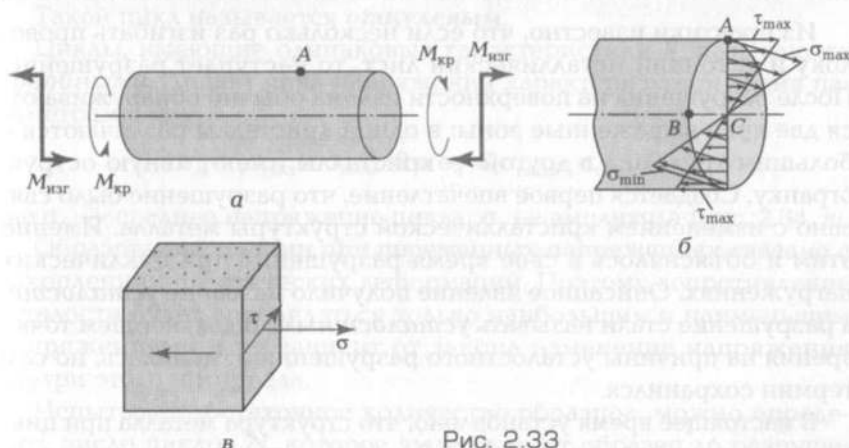


Рис. 2.33

Выразим эквивалентное напряжение через касательное напряжение от кручения и нормальное напряжение от изгиба с учетом плоского напряженного состояния.

По третьей теории прочности (критерий наибольшего касательного напряжения) при совместном действии кручения и изгиба эквивалентное напряжение будет равно

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{изг}}}{W_x}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\text{кр}}}{W_p}\right)^2}.$$

Если учесть, что для круглого бруса $W_p = 2W_x$, то эквивалентное напряжение определится так:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}}{W_x}.$$

По четвертой теории прочности (критерий предельного состояния — энергия формоизменения) при совместном действии кручения и изгиба эквивалентное напряжение будет равно

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

При расчете на прочность необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma].$$

2.10. ПОНЯТИЕ О СОПРОТИВЛЕНИИ УСТАЛОСТИ

Из практики известно, что если несколько раз изгибать проволоку или тонкий металлический лист, то наступает разрушение. После разрушения на поверхности излома обычно обнаруживаются две ярко выраженные зоны: в одной кристаллы различаются с большим трудом, а в другой — кристаллы имеют явную острую огранку. Создается первое впечатление, что разрушение было связано с изменением кристаллической структуры металла. Именно этим и объяснялось в свое время разрушение при циклических нагружениях. Описанное явление получило название **усталости**, а разрушение стали называть **усталостным**. В дальнейшем точка зрения на причины усталостного разрушения изменилась, но сам термин сохранился.

В настоящее время установлено, что структура металла при циклических нагрузках не меняется. В зоне повышенных напряжений,

обусловленных различными факторами (о чем будет сказано далее), образуются микротрещины, вокруг которых (при многократном изменении напряжений) кристаллы начинают разрушаться и трещина проникает в глубь материала.

Теоретический анализ сопротивления усталости связан с большими трудностями. Природа усталостного разрушения обусловлена особенностями молекулярного и кристаллического строения вещества. Поэтому для создания корректной теории сопротивления усталости необходимо изучить особенности межкуристаллических связей, применяя статистическую обработку и теорию вероятности.

Опыты показывают, что усталостное разрушение возникает при переменных во времени напряжениях. **Циклом** напряжений называется совокупность последовательных значений напряжений за один период их изменения при регулярном нагружении. Наибольшее и наименьшее напряжение цикла обозначим через $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$. Их соотношение называется **коэффициентом асимметрии цикла**:

$$R = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}.$$

Если $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, тогда $R = -1$ и цикл называется **симметричным** (рис. 2.34, а). Такой цикл нагружения испытывают все вращающиеся под изгибающей нагрузкой валы: через каждые 180° угла поворота растянутое волокно будет испытывать сжатие, и наоборот.

Поверхность зубьев колес, дорожки качения шарикоподшипников испытывают также переменные напряжения, но характеристика цикла у них будет другая (рис. 2.34, б):

$$R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = 0.$$

Такой цикл называется **отнулевым**.

Циклы, имеющие одинаковые характеристики R , называются **подобными**. Любой цикл напряжений характеризуется двумя параметрами:

$$\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2 \text{ и } \sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2,$$

где σ_m — среднее напряжение цикла; σ_a — амплитуда (рис. 2.34, в).

Образование трещин при переменных напряжениях связано с накоплением пластических деформаций. Поэтому сопротивление усталости будет определяться только наибольшим и наименьшим напряжениями и не зависит от закона изменения напряжения внутри этого интервала.

Испытывая достаточное количество образцов, можно определить число циклов N , которое выдерживает образец до разруше-

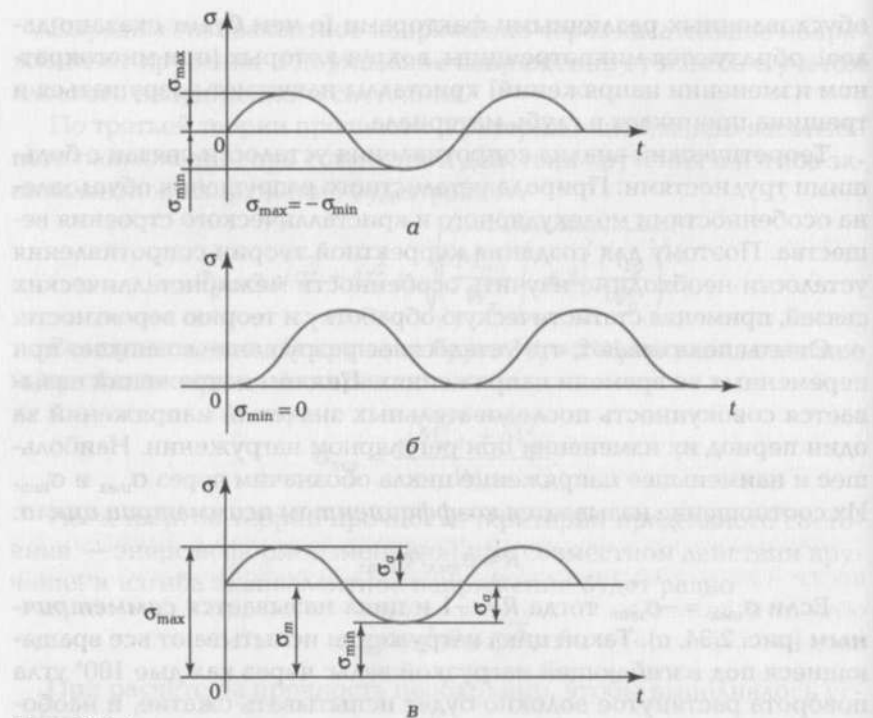


Рис. 2.34

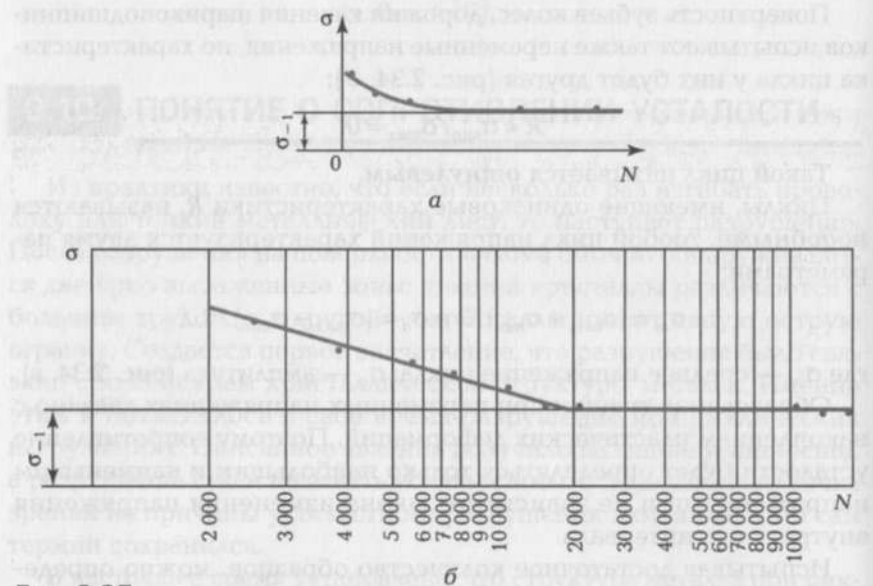


Рис. 2.35

ния, в зависимости от величины $\sigma_{\max}$ цикла (рис. 2.35, а). Поскольку с уменьшением $\sigma_{\max}$ число циклов N сильно возрастает, то строят эту кривую, откладывая по оси абсцисс логарифм от числа N (рис. 2.35, б).

Для черных металлов всегда можно найти такое наибольшее $\sigma_{\max}$, при котором материал не разрушается при любом числе циклов. Такое напряжение называется **пределом выносливости**. Для цветных металлов и для закаленных до высокой твердости сталей такое число циклов установить не удастся, поэтому вводится понятие «предел ограниченной выносливости», за которое принимается напряжение, при котором образец способен выдержать 10^8 циклов.

Для сталей можно принять предел выносливости при изгибе $\sigma_{-1} = (0,4 \dots 0,5) \sigma_{\text{в.р.}}$, а для цветных металлов $\sigma_{-1} = (0,25 \dots 0,5) \sigma_{\text{в.р.}}$. При испытаниях на кручение для обычных сталей предел выносливости принимают $\tau_{-1} = 0,6 \sigma_{-1}$, для хрупких материалов (чугун, высоколегированная сталь) $\tau_{-1} = 0,8 \sigma_{-1}$.

В условиях циклического растяжения и сжатия предел выносливости на 10...20 % ниже предела выносливости при изгибе. Это объясняется тем, что при растяжении и сжатии напряжения распределены равномерно по всему сечению; при изгибе наибольшие напряжения возникают в крайних волокнах, а остальная часть поперечного сечения нагружена меньше, что затрудняет образование усталостных трещин.

В табл. 2.4 приведены значения пределов выносливости для некоторых материалов.

Таблица 2.4. Значение пределов выносливости		
Материал	Предел выносливости, Н/мм ²	
	при изгибе σ_{-1}	при кручении τ_{-1}
Сталь низкоуглеродистая	160...220	80...120
Сталь 30 незакаленная	200...270	110...140
Сталь 45 незакаленная	250...340	150...200
Сталь 30ХГС закаленная	700	400
Чугун серый	100	80
Алюминиевый сплав АМц (термообработанный)	49...70	—
Органическое стекло	20...25	—

Факторы, влияющие на предел выносливости

Одним из основных факторов, которые необходимо учитывать при расчетах на сопротивление усталости, является **концентрация напряжений**. В области изменений формы упругого тела (углы, галтели, выточки, малые отверстия), а также в зоне контакта деталей (шпонки, соединения с посадками гарантированного натяга) возникают местные повышенные напряжения, которые оцениваются коэффициентом концентрации напряжений. **Теоретический коэффициент концентрации** α_σ (α_τ) напряжений определяется отношением наибольших местных напряжений $\sigma_{\max}$ ($\tau_{\max}$) к номинальному $\sigma_{\text{ном}}$: $\alpha_\sigma = \sigma_{\max}/\sigma_{\text{ном}}$; $\alpha_\tau = \tau_{\max}/\tau_{\text{ном}}$; его значения приводятся в виде таблиц и графиков в справочной литературе по машиностроению. Например, на рис. 2.36 показана зависимость теоретического коэффициента концентрации от соотношения геометрических размеров полосы с отверстием.

Номинальное напряжение определяется по формулам сопротивления материалов по ослабленному сечению, например, при растяжении (сжатии)

$$\sigma_{\text{ном}} = \frac{N}{S_{\text{бр}} - S_{\text{осл}}},$$

где $S_{\text{бр}}$ — площадь «брутто» поперечного сечения бруса без учета площади ослабляющих его элементов (площади отверстий, вырезов и т. д.). Так, для показанной на рис. 2.36 полосы толщиной δ площадь «брутто» $S_{\text{бр}} = b\delta$, $S_{\text{осл}} = a\delta$.

Поскольку концентрация напряжений оказывает различное влияние на усталость в зависимости от свойств материала и от характера нагружения, вводится понятие «эффективный коэффициент концентрации напряжений» K_σ (K_τ) — отношение предела выносливости образца без концентрации напряжений к пределу выносливости образца таких же размеров с концентрацией напряжений.

Экспериментальные данные позволили установить связь между эффективным коэффициентом концентрации и теоретическим:

$$K_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1),$$

где q — коэффициент чувствительности к местным напряжениям, который зависит от свойств материала. Для высоколегированных сталей q близко к единице. Для конструкционных сталей $q = 0,6 \dots 0,8$. Для серого чугуна q близко к нулю.

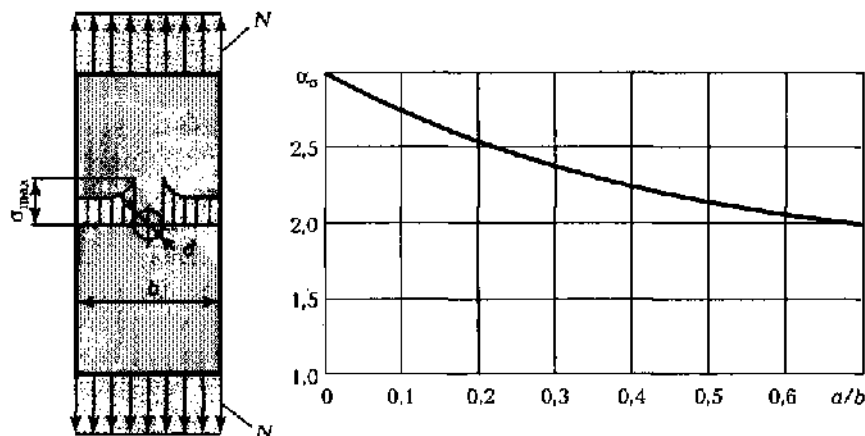


Рис. 2.36

Состояние поверхности детали является еще одним фактором, влияющим на усталость, что учитывается **коэффициентом влияния шероховатости поверхности K_F** :

$$K_F = \sigma_{-1'} / \sigma_{-1},$$

где $\sigma_{-1'}$ — предел выносливости образцов с данным состоянием поверхности (например, после строгания или обтачивания); σ_{-1} — предел выносливости образцов, имеющих стандартную обработку поверхности (в качестве таковой принимается шлифование). Так, обтачивание алюминиевых образцов соответствует $K_F = 0,8 \dots 0,9$, магниевых — $K_F = 0,7 \dots 0,8$. Особенно чувствительны к качеству обработки поверхности детали из титановых сплавов: снижение предела выносливости титановых обточенных образцов по сравнению со шлифованными составляет 33 %.

Масштабный фактор наряду с фактором состояния поверхности также влияет на предел выносливости. Он учитывается **коэффициентом влияния абсолютных размеров поперечного сечения K_{da}** , который равен отношению предела выносливости гладких образцов диаметром d к пределу выносливости гладких образцов стандартного размера:

$$K_{da} = \sigma_{-1d} / \sigma_{-1},$$

На предел выносливости также влияют поверхностное упрочнение и анизотропия свойств, которые учитываются соответственно коэффициентами K_v и K_A .

Коэффициент запаса при циклическом нагружении и его определение

В результате испытаний группы образцов в условиях асимметричных циклов получают предельное значение σ_a , соответствующее выбранному значению σ_m . Это дает одну точку на диаграмме $\sigma_a - \sigma_m$ (рис. 2.37, а). По результатам испытаний другой группы образцов находят вторую точку и т.д. В результате получают кривую предельных напряжений при асимметричном цикле. Она называется *диаграммой предельных амплитуд*. На этой диаграмме результат испытаний образцов при симметричном цикле отмечен точкой *L*. Точка *N* для хрупких материалов соответствует пределу прочности образца. Левая часть диаграммы может быть аппроксимирована прямой, имеющей угловой коэффициент $\psi_\sigma = \tan \alpha$. Тогда для левой части диаграммы можно записать

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m.$$

Эксперименты показывают, что для углеродистых сталей $\psi_\sigma = 0,1 \dots 0,2$, для легированных сталей $\psi_\sigma = 0,2 \dots 0,3$; при кручении тех же образцов $\psi_\tau = 0,05 \dots 0,1$ и $\psi_\tau = 0,1 \dots 0,5$ соответственно.

При схематизации кривую на диаграмме предельных амплитуд заменяют двумя прямыми (см. рис. 2.37, а); вторая прямая проходит под углом 45° к оси абсцисс из точки *N*.

На рис. 2.37,а представлена диаграмма предельных амплитуд для образца. Построив диаграмму предельных амплитуд при асимметричном цикле для детали, получим возможность проводить расчеты на прочность деталей, работающих в условиях циклически меняющихся напряжений. Для детали с учетом влияния местных напряжений, масштабного фактора и качества обработки поверхности предельные амплитуды напряжений σ_a уменьшатся в *K* раз. Следовательно, для рабочей точки (р.т.) *A* (рис. 2.37, б) амплитуда

$$\sigma_a = (\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m) / K,$$

где $K = K_\sigma / (K_{d\sigma} K_F)$. В соответствии с ГОСТ 25.504—82 коэффициент снижения предела выносливости для 50%-ной вероятности разрушения ($P = 0,5$) будет определяться следующей зависимостью:

$$K = \left(\frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_F} - 1 \right) \frac{1}{K_v K_A}.$$

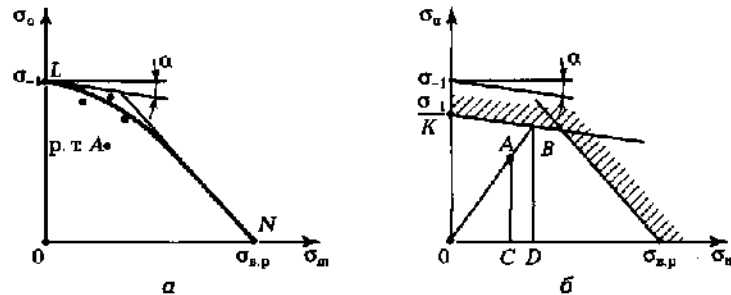


Рис. 2.37

Помимо рассмотренных ранее коэффициентов, влияющих на снижение предела выносливости, в эту зависимость входят коэффициент анизотропии K_A и коэффициент влияния поверхностного упрочнения K_ψ (о поверхностном упрочнении см. главу 4).

Таким образом, мы получили данные для построения диаграммы предельных амплитуд детали (см. рис. 2.37, б). Условимся под коэффициентом запаса циклической прочности понимать отношение отрезков OB к OA :

$$n_R = OB/OA.$$

Это соотношение характеризует степень близости рабочих условий детали к предельному состоянию материала.

Для определения запаса прочности n_R воспользуемся геометрическими соотношениями отрезков на рис. 2.37, б $BD/OD = AC/OC$, следовательно, $\sigma_{aB}/\sigma_{mB} = \sigma_a/\sigma_m$ откуда $\sigma_{aB} = \sigma_{mB}(\sigma_a/\sigma_m)$. Но $\sigma_{aB} = (1/K) \times (\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_{mB})$. Приравняв правые части, получаем уравнение, из которого находим σ_{mB} :

$$\sigma_{mB} = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} \sigma_m, \text{ или } \frac{\sigma_{aB}}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m}.$$

Зная, что $OD/OC = \sigma_{mB}/\sigma_m$ (см. рис. 2.37, б) и $OD/OC = OB/OA$, получаем окончательное выражение для определения коэффициента запаса циклической прочности:

$$n_R = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m}.$$

Если точка B окажется на правой ограничивающей прямой, $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a < \sigma_{в.р.}$. В этом случае конструктор, назначая размеры де-

тали, начинает расчет с выполнения обычных условий по пределу текучести или временному сопротивлению разрыву, обеспечивая необходимый запас $n_t = \sigma_t / \sigma_{\max}$ или $n_z = \sigma_{a.p} / \sigma_{\max}$, и только затем (если нужно) вычисляет n_R .

Аналогичным образом определяют коэффициент запаса для кручения.

2.11. ПРОЧНОСТЬ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

Если на элементы конструкции действуют активные внешние силы и под действием этих сил все элементы рассматриваемой конструкции находятся в равновесии, то имеет место **статическое** нагружение. Если же тело под действием приложенных сил перемещается с ускорением, то такое нагружение называется **динамическим**.

В том случае, когда под действием приложенных сил тело перемещается с постоянной скоростью, такое нагружение будет статическим.

Например, груз поднимается с постоянной скоростью. Воздействие груза на трос будет статическим. Если тот же груз будет подниматься с ускорением, то его действие на трос уже будет динамическим.

Еще пример динамического нагружения: воздействие на фундамент парового молота при ковке. При резком изменении скорости движения имеет место явление удара. В таких случаях может обнаружиться хрупкость материалов, которые при статическом действии нагрузок вели себя как пластичные. Поэтому при проверке прочности деталей конструкции, подвергающихся действию динамических нагрузок, приходится учитывать влияние этих нагрузок не только на величину вызываемых ими напряжений, но и на изменение свойств этих материалов.

Таким образом, при ускоренном движении частей конструкции в них возникают **добавочные** напряжения, вызванные силами инерции.

Следует различать три случая динамического нагружения:

- если величина и расположение внешних сил, приложенных к рассматриваемому элементу, не зависят от его деформаций и если эти деформации не изменяют характера движения стержня, то ускорения его точек вычисля-

ются по правилам кинематики твердого тела; учет динамических воздействий будет сводиться к определению добавочной нагрузки, вызванной силами инерции. Это имеет место в большинстве случаев (за исключением удара);

- если возникают колебания рассматриваемой части конструкции, то учет динамической нагрузки будет сводиться также к определению добавочной нагрузки, вызванной силами инерции. Кроме того, должен быть проведен расчет наиболее напряженных элементов на усталостную прочность;
- если значение ускорений, а значит, и соответствующих сил инерции будет зависеть от деформируемости рассматриваемых элементов (в случае удара), то при вычислении сил инерции необходимо будет использовать данные сопротивления материалов.

Проверка прочности для каждого из указанных случаев имеет свою специфику.

Пример 2.18

Груз весом G поднимается равноускоренно тросом, площадь поперечного сечения которого S . Найти напряжение, возникающее в тросе, если ускорение груза равно a . Весом троса пренебречь.

Решение.

I способ.

1. Запишем уравнение движения груза, рассматривая его как материальную точку. Для этого освободим груз от связи, заменив ее действие силой натяжения T (рис. 2.38, а):

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i.$$

Спроецировав это уравнение на вертикальную ось z , получим

$$m\bar{a} = -G + T,$$

откуда

$$T = G + (G/g)a.$$

2. Определяем динамическое напряжение в поперечном сечении троса:

$$\sigma_d = T/S = \frac{G + (G/g)a}{S} = \frac{G}{S} \left(1 + \frac{a}{g} \right) = \sigma_c \left(1 + \frac{a}{g} \right).$$

II способ.

1. Прикладываем к грузу активные, пассивные и инерционные силы (рис. 2.38, б).

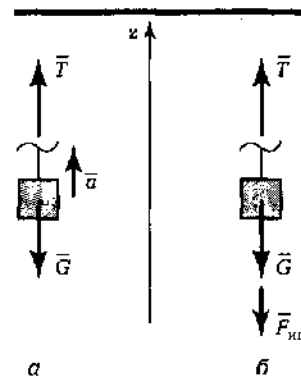


Рис. 2.38

Инерционная сила $F_{ин}$ должна быть равна ma и направлена в сторону, противоположную направлению ускорения $\bar{a}$.

2. Применяя принцип Д'Аламбера, запишем условия равновесия приложенных сил:

$$-G - F_{ин} + T = 0,$$

откуда определяем $T = G + F_{ин} = G + (G/g)a$.

3. Определяем динамическое напряжение в поперечном сечении троса:

$$\sigma_A = T/S = \frac{G + (G/g)a}{S} = \frac{G}{S} \left(1 + \frac{a}{g} \right) = \sigma_c \left(1 + \frac{a}{g} \right).$$

Отв е т. Динамическое напряжение, возникающее в поперечном сечении троса, равно

$$\sigma_A = \sigma_c \left(1 + \frac{a}{g} \right).$$

Анализируя полученный результат, отметим, что динамическое напряжение равно статическому, умноженному на **динамический коэффициент** $k_A = (1 + a/g)$:

$$\sigma_A = \sigma_c k_A.$$

2.12. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ОСЕВОМ НАГРУЖЕНИИ СТЕРЖНЯ

Под **устойчивостью** понимается свойство системы самостоятельно восстанавливать свое первоначальное состояние после того, как ей было сообщено некоторое отклонение от положения равновесия. Если система таким свойством не обладает, то она называется **неустойчивой** (говорят, что произошла потеря устойчивости).

Система, потерявшая устойчивость, может вести себя по-разному, но переход к новому положению равновесия сопровождается большими перемещениями. Классическим примером неустойчивого равновесия является равновесие шарика на выпуклой поверхности (рис. 2.39, а). Малейшее отклонение от этого положения приведет к тому, что шарик скатится вниз (рис. 2.39, б, в). Попад на вогнутую поверхность, шарик будет находиться в состоянии устойчивого равновесия. Если теперь его вывести из этого состояния, отклонив влево или вправо, он вернется в первоначальное положение.

Явление потери устойчивости упругими телами можно наблюдать на целом ряде примеров. Наиболее простым случаем являет-

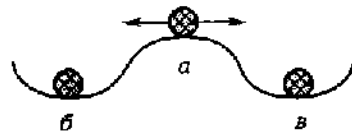


Рис. 2.39



Рис. 2.40

ся потеря устойчивости центрально сжатого стержня (рис. 2.40). При некотором значении силы стержень не сможет сохранить прямолинейную форму и изогнется. Произойдет потеря устойчивости.

Тонкостенная труба, нагруженная внешним давлением, также может потерять устойчивость. При этом круглое сечение принимает форму эллипса, и труба сплющивается.

Задача Эйлера

Впервые задача об устойчивости стержня была поставлена и решена Л. Эйлером в середине XVIII в. Поэтому, когда речь идет об устойчивости сжатого стержня, употребляют выражение «устойчивость стержня по Эйлеру». Эйлер определил значение первой критической силы для продольно сжатого стержня с шарнирным опиранием (рис. 2.41).

Запишем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки:

$$EJy'' = -M.$$

Изгибающий момент $M = Fy$ (см. рис. 2.41). Подставим в правую часть дифференциального уравнения вместо изгибающего момен-

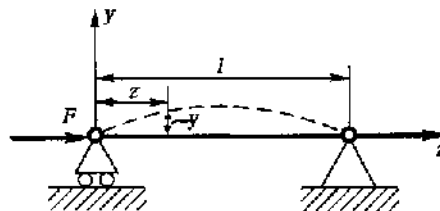


Рис. 2.41

та M его значение Fy и перенесем все члены в левую часть. В результате получим однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + k^2 y = 0,$$

где $k^2 = F/(EJ)$.

Запишем решение этого однородного уравнения: $y = C \sin kz + D \cos kz$. Определим произвольные постоянные из граничных условий: при $z = 0$ $y = 0$ и при $z = l$ $y = 0$. Из первого условия вытекает, что $D = 0$, а из второго — что $C \sin kl = 0$. Это уравнение имеет два решения: $C = 0$ и $\sin kl = 0$. Когда $C = 0$, перемещения y тождественно обращаются в нуль; этот случай нас не интересует. Рассмотрим второй случай. Если $\sin kl = 0$, то $kl = n\pi$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. При $n = 1$ $kl = \pi$ и тогда $k^2 l^2 = \pi^2$. Подставив в это равенство вместо $k^2 = F/(EJ)$, получим выражение для определения первой критической силы:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Таким образом, критическая сила $F_{кр}$ представляет собой наименьшую сжимающую силу, при которой наряду с прямолинейной формой равновесия становится возможной другая (изгибная) форма равновесия. Иначе говоря, прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой.

Зависимость критической силы от условий закрепления стержня

Формула Эйлера получена в предположении шарнирного опирания стержня по концам. На практике стержень может иметь различное опирание на концах: свободное; заделку; сочетание заделки с шарнирным опиранием на другом конце и т.д. Необходимо установить зависимость критической силы от способа закрепления концов стержня. Введем **коэффициент приведения длины** μ в формулу для определения критической силы, при помощи которой можно определять $F_{кр}$ для случаев опирания концов стержня, показанных на рис. 2.42:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}.$$

Во всех случаях, кроме последнего, значение μ определяется путем сопоставления упругой линии изогнутого стержня с длиной

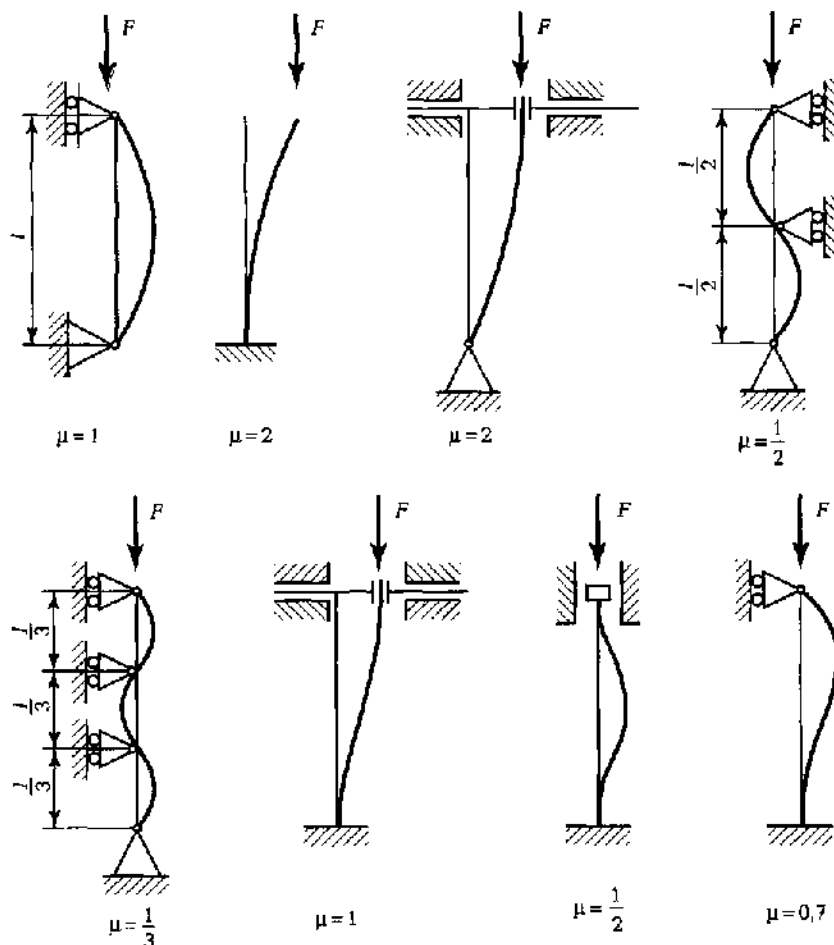


Рис. 2.42

полуволны синусоиды при шарнирном закреплении; число μ обратно пропорционально числу полуволн.

Пример 2.19

Определить критическую силу для колонны, поперечное сечение которой составлено из двух швеллеров № 20У (ГОСТ 8240—97), полки которых приварены, образуя прямоугольное сечение. Расчетная схема колонны показана на рис. 2.43, а. Нижний конец колонны жестко заделан; на верхнем конце в плоскости xz реализуется шарнирное опирание (см. последнюю схему на рис. 2.42); в плоскости yz верхний конец может перемещаться в

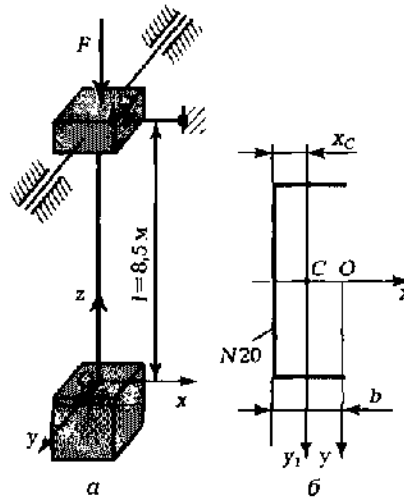


Рис. 2.43

направлении y без поворота в плоскости yz (см. третью схему справа в нижнем ряду на рис. 2.42). Модуль упругости стали $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа.

Решение.

1. Определяем моменты инерции поперечного сечения колонны относительно осей x и y :

а) выписываем геометрические характеристики швеллера № 20У из ГОСТ 8240—97 (см. Приложение III):

$$J_x = 1\,520 \text{ см}^4, J_y = 113 \text{ см}^4;$$

$$S = 23,4 \text{ см}^4, x_c = 2,07 \text{ см}, b = 7,6 \text{ см};$$

б) вычисляем моменты инерции поперечного сечения колонны относительно осей x и y :

$$J_x = 1\,520 \cdot 2 = 3\,040 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 2[J_y + S(b - x_c)^2] = 2[113 + 23,4(7,6 - 2,07)^2] = 1\,657,2 \text{ см}^4.$$

2. Определяем критическую силу:

а) вычисляем критическую силу в плоскости xz ; значение коэффициента μ принимаем равным 0,7 (см. рис. 2.42):

$$F_{\text{кр1}} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,06 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1\,657,2 \cdot 10^{-8}}{(0,7 \cdot 8,5)^2} = 951,7 \text{ кН};$$

б) вычисляем критическую силу в плоскости yz ; значение коэффициента μ принимаем равным 1 (см. рис. 2.42):

$$F_{кр2} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,06 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 3\,040 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 8,5)^2} = 855,5 \text{ кН}.$$

Таким образом, критической силой для колонны будет $F_{кр} = 855,5 \text{ кН}$.

Гибкость стержня

Найдем критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{S} = \frac{\pi^2 EJ}{S(\mu l)^2}.$$

Введем в формулу радиус инерции

$$i^2 = \frac{J_{min}}{S}.$$

Тогда выражение для критического напряжения перепишем в виде

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i^2}{(\mu l)^2}.$$

Величину $\mu l/i$ обозначим через λ и будем называть **гибкостью стержня**. При этом выражение для критического напряжения принимает вид

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Область применимости формулы Эйлера

Формула была получена Л. Эйлером из уравнения изогнутой оси балки, т. е. когда напряжение в момент потери устойчивости не превышает предела пропорциональности (когда справедлив закон Гука). Иначе говоря, формула Эйлера применима лишь при соблюдении условия $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пл}$. Подставляя в формулу вместо критического напряжения предел пропорциональности $\sigma_{пл}$, можно выразить предельное значение гибкости

$$\lambda_{пред} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пл}}}.$$

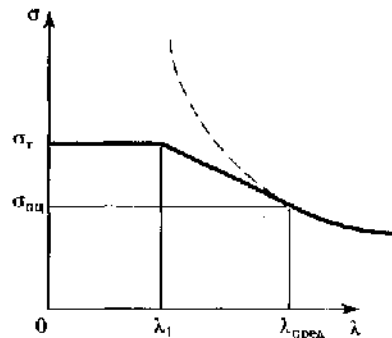


Рис. 2.44

Если стержень имеет $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$, то формула Эйлера неприемлема.

Для различных материалов предельное значение гибкости будет различным, так как у них разные значения предела пропорциональности. Например, для стали марки Ст3 $\lambda_{\text{пред}} = 100$.

Ф. С. Ясинским была предложена эмпирическая зависимость

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda,$$

которой можно пользоваться до предела текучести $\sigma_{\text{т}}$ (рис. 2.44), т. е. для случаев, когда имеет место следующее неравенство: $\lambda_1 < \lambda < \lambda_{\text{пред}}$. Коэффициенты a и b зависят от материала; например, для стали марки Ст3 $a = 33$ МПа, $b = 1,47$ МПа (при $40 \leq \lambda \leq 100$). Для дерева (сосна) $a = 29,3$ МПа, $b = 0,194$ МПа.

Для сжатых стержней с гибкостью менее 40 в первом приближении расчет ведется на чистое сжатие.

Расчет сжатых стержней на устойчивость

Рабочие напряжения в конструкции должны быть всегда меньше допускаемых. При расчете коротких стержней на прочность

$$\sigma = \frac{F}{S_{\text{нет}}} \leq [\sigma]_{\text{сж}},$$

где $[\sigma]_{\text{сж}}$ — допускаемое напряжение на сжатие; $S_{\text{нет}}$ — площадь поперечного сечения стержня за вычетом, например, отверстий под болты, т. е. площадь «петто».

При расчете стержней на устойчивость

$$\sigma_{\text{кр}} = F/S_{\text{бр}} \leq [\sigma]_{\text{у}}.$$

Здесь площадь поперечного сечения — «брутто», т. е. без учета ослаблений (отверстий под болты, заклепки и т. д.), так как на значение критического напряжения они не оказывают влияния. Допускаемое напряжение на устойчивость $[\sigma]_y$ вычисляют по формуле

$$[\sigma]_y = \varphi[\sigma]_{сж},$$

где φ называется коэффициентом снижения допускаемых напряжений и зависит от гибкости λ (учитывает возможность внецентренного приложения силы). Значения коэффициента приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5. Значение коэффициента φ допускаемого напряжения сжатия $[\sigma]_c$ для различных материалов				
λ	φ			
	Ст3	Ст5	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,16	0,31
110	0,52	0,43	—	0,25
120	0,45	0,36	—	0,22
130	0,40	0,33	—	0,18
140	0,32	0,29	—	0,16
150	0,29	0,26	—	0,14
160	0,26	0,24	—	0,12
170	0,23	0,21	—	0,11
180	0,21	0,19	—	0,10
190	0,19	0,17	—	0,09
200	—	0,16	—	0,08
$[\sigma]_{сж}, \text{ МПа}$				
	120	150	100	10

Пример 2.20

Определить допускаемую сжимающую силу для шарнирно закрепленного стержня. Длина стержня $l = 8$ м. Поперечное сечение — прямоугольное с размерами сторон 200×150 мм. Материал — Ст3.

Решение.

1. По табл. 2.5 выбираем допускаемое напряжение.

Для заданного материала $[\sigma]_{сж} = 120$ МПа.

2. Оцениваем коэффициент μ .

Коэффициент μ принимаем равным единице (см. рис. 2.42).

3. Подсчитываем гибкость стержня:

$$\lambda = (\mu l) / i_{\min}; \quad i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / S} = \sqrt{\frac{HB^3}{12HB}} = \frac{B}{\sqrt{12}} = \frac{150}{\sqrt{12}} = 44 \text{ мм};$$
$$\lambda = \frac{8000}{44} = 181.$$

4. По табл. 2.5 находим $\varphi = 0,21$.

5. Вычисляем допускаемую сжимающую силу:

$$F/S = \varphi[\sigma]_{сж},$$

отсюда $F_{\text{доп}} = (0,21 \cdot 120)(200 \cdot 150) = 756\,000 \text{ Н} = 756 \text{ кН}$.

Пример 2.21

Определить размеры поперечного сечения стойки, защемленной одним концом, а на другом, свободном конце, нагруженной сжимающей силой $F = 10\,000$ Н. Длина стойки $l = 1,2$ м, поперечное сечение — толстостенная труба, диаметр которой $D = 20\delta$, где δ — толщина трубы; материал — Ст5.

Решение.

1. По табл. 2.5 выбираем допускаемое напряжение.

Для заданного материала $[\sigma]_{сж} = 150$ МПа.

2. Оцениваем коэффициент μ .

Коэффициент $\mu = 2$ (см. рис. 2.42).

Далее задача решается путем последовательных приближений, поскольку гибкость стержня неизвестна.

3. Предварительный выбор размеров поперечного сечения.

Если бы стержень был коротким, то размеры поперечного сечения определялись бы из соотношения

$$F/S = [\sigma]_{сж}, \text{ откуда } S = 10\,000/150 = 66,6 \text{ мм}^2; S = \pi D\delta = \pi \cdot 20\delta^2;$$

$$\delta^2 = 66,6/(\pi \cdot 20) = 1,06 \text{ мм}^2; \delta = 1,03 \text{ мм}.$$

Отсюда принимаем предварительно $D = 20 \cdot 1,03 = 20,6$ мм.

4. Задаемся диаметром трубы, большим, чем 20,6 мм. Например, $D = 35$ мм, тогда $\delta = 1,75$ мм.

5. Определяем гибкость:

$$\lambda = (\mu l)/i_{\min}; \quad i_{\min} = \sqrt{J_{\min}/S} = \sqrt{\frac{\pi D^3 \delta}{8\pi D \delta}} = \frac{D}{2,8} = \frac{35}{2,8} = 12,5 \text{ мм}; \quad \lambda = \frac{2 \cdot 1200}{12,5} = 192.$$

6. По табл. 2.5 находим $\varphi = 0,17$.

7. Вычисляем допускаемую сжимающую силу:

$$F/S = \varphi[\sigma]_{\text{сж}}, \text{ отсюда } F_{\text{доп}} = (0,17 \cdot 150)(\pi \cdot 35 \cdot 1,75) = 4904 \text{ Н.}$$

Так как допускаемая сжимающая сила меньше действующей по условию задачи, то зададимся большим диаметром трубы.

8. Задаем $D = 43 \text{ мм}$, тогда $\delta = 2,15 \text{ мм}$.

$$9. \quad i_{\min} = \frac{D}{2,8} = \frac{43}{2,8} = 15,36 \text{ мм}; \quad \lambda = \frac{2 \cdot 1200}{15,36} = 156.$$

10. В табл. 2.5 даются значения: для $\lambda = 150$ $\varphi = 0,26$, а для $\lambda = 160$ $\varphi = 0,24$. Интерполируя, в нашем случае получаем $\varphi = 0,25$ и вновь вычисляем допускаемую сжимающую силу

$$F_{\text{доп}} = (0,25 \cdot 150)(\pi \cdot 43 \cdot 2,15) = 10886 \text{ Н.}$$

11. Поскольку действующая на стойку сжимающая сила меньше допускаемой, то принимаем размеры поперечного сечения трубы: $D = 43 \text{ мм}$, $\delta = 2,15 \text{ мм}$.

Коэффициент запаса по устойчивости

При расчете продольно сжатого стержня необходимо помнить, что напряжение сжатия не должно превышать критического

$$\sigma = F/S_{\text{ср}} \leq \sigma_{\text{кр}} = F_{\text{кр}}/S_{\text{ср}}.$$

Отсюда $\sigma \leq \sigma_{\text{кр}}/n_y$, или $\varphi[\sigma]_{\text{сж}} = \sigma_{\text{кр}}/n_y$. Таким образом, коэффициент запаса по устойчивости

$$n_y = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\varphi[\sigma]_{\text{сж}}}.$$

Пример 2.22

Для условий примера 2.21 определить коэффициент запаса по устойчивости сжатой стойки, если модуль упругости углеродистой стали $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, а $\sigma_{\text{пл}} = 200 \text{ МПа}$.

Решение.

1. Определяем $\lambda_{\text{пред}}$.

Прежде всего необходимо определить, по какой формуле считать $\sigma_{\text{кр}}$. Для этого вычисляем $\lambda_{\text{пред}}$:

$$\sigma_{\text{из}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\text{пред}}^2}, \text{ откуда } \lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{из}}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

В рассмотренном примере 2.21 гибкость стойки была равна 156, поэтому применима формула Эйлера.

2. Вычисляем критическую силу

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} S = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} S = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{156^2} \pi \cdot 43 \cdot 2,15 = 23\,557 \text{ Н.}$$

3. Вычисляем коэффициент запаса по устойчивости

$$n_{\text{уст}} = \frac{F_{\text{кр}}}{F_{\text{доп}}} = \frac{23\,557}{10\,886} = 2,16.$$

2.13. РАСКРЫТИЕ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Статически неопределимой системой называется такая, у которой число наложенных связей больше, чем теоретически необходимо для обеспечения геометрической неизменяемости этой системы.

В реальных конструкциях, несмотря на выполнение условий равновесия сил, действующих на данную конструкцию, приходится иногда для обеспечения прочности отдельных ее элементов вводить дополнительные связи.

Степень статической неопределимости соответствует разности между числом неизвестных (реакций опор и внутренних силовых факторов) и числом независимых уравнений статики.

Изложим методику раскрытия статической неопределимости механических систем, составленных из прямых брусьев, работающих только на растяжение (сжатие).

При раскрытии статической неопределимости придерживаются следующего порядка решения задачи.

1. Вычерчивают заданную стержневую систему, проставив на ней все нагрузки (рис. 2.45, а).

2. Вычерчивают вспомогательную систему, освобожденную от связей. На место отброшенных связей проставляют в зависимости от типа и характера связи реакции (рис. 2.45, б).

3. Составляют необходимое и достаточное число уравнений равновесия. Сопоставляя число неизвестных с числом уравнений, определяют степень статической неопределимости. Поскольку на

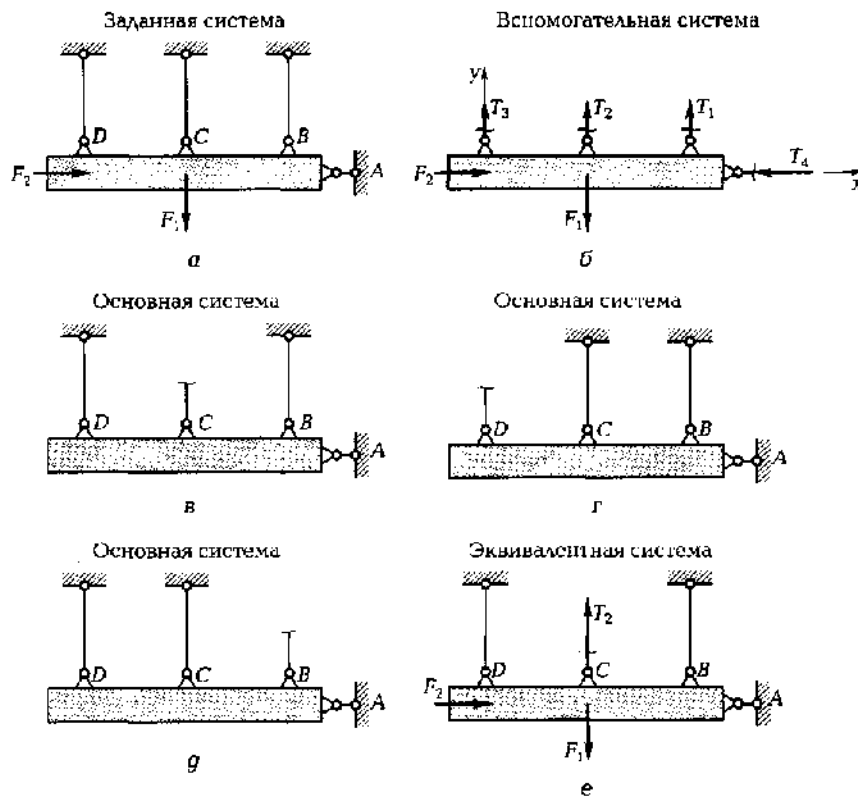


Рис. 2.45

представленную на рис. 2.45. *a* стержневую систему действует произвольная плоская система сил, то можно составить только три независимых уравнения равновесия, а неизвестных реакций — четыре. Следовательно, данная стержневая система один раз статически неопределима.

4. Выбирают основную систему, т. е. систему, подобную заданной, но освобожденную от дополнительных связей. Основная система должна быть геометрически неизменяемой. Для данного примера основными системами могут быть только три, показанные на рис. 2.45, *в*, *г*, *д*.

5. Вычерчивают эквивалентную систему, т. е. основную систему с приложенными к ней заданными и искомыми силами (рис. 2.45, *е*).

6. Из рассмотрения перемещений в заданной и эквивалентной системах составляют столько уравнений перемещений, сколько раз система статически неопределима.

7. Уравнения перемещений преобразуют в уравнения сил.

8. Полученную в пп. 3 и 7 систему уравнений решают совместно и определяют неизвестные силовые факторы.

Рассмотрим методику составления уравнений перемещений на простейших примерах раскрытия статической неопределимости стержневых систем.

Пример 2.23

Прямой однородный стержень (рис. 2.46, а) жестко закреплен по концам и нагружен вдоль оси симметрии продольными силами, размеры стержня указаны на чертеже. Определить реакции опор, построить эпюры внутренних сил, напряжений и перемещений по высоте стержня.

Решение.

Поскольку брус под действием приложенных сил находится в равновесии, то по пятой аксиоме статики равновесие не нарушится, если система станет абсолютно твердой.

Применяя принцип освобождения от связей, заменим условно отброшенные опоры А и В реакциями и вычертим вспомогательную систему (рис. 2.46, б).

Составим уравнение равновесия, спроецировав все силы на вертикальную ось, приравняв их сумму к нулю:

$$N_A - F + 2F - N_B = 0.$$

Поскольку имеем одно независимое уравнение равновесия, а неизвестных реакций две (N_A и N_B), то система один раз статически неопределима. Данную задачу уравнениями статики решить нельзя. Для раскрытия статической неопределимости прежде всего выбираем основную и вычер-

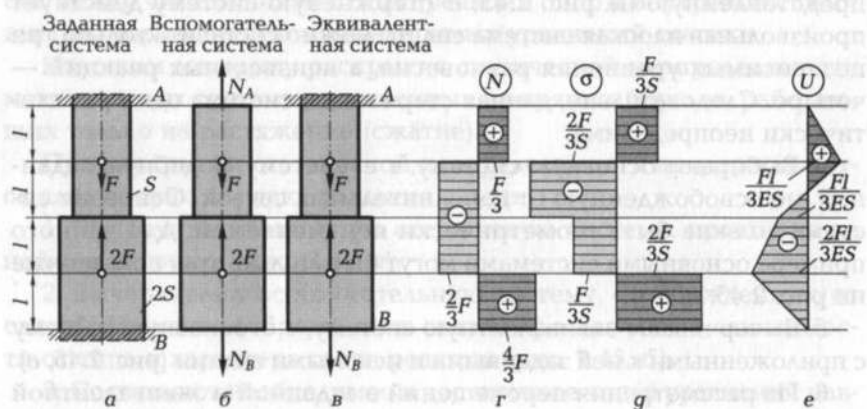


Рис. 2.46

чиваем эквивалентную систему (рис. 2.46, в), после чего составляем уравнение перемещений для торца B , имея в виду, что под действием сил F , $2F$ и N_B перемещение этого сечения должно быть равно нулю, так как наложенные связи (жесткие заделки) не допускают никаких перемещений опорных сечений:

$$U_B(F, 2F, N_B) = 0.$$

Воспользуемся принципом независимости действия сил, тогда

$$U_B(F, 2F, N_B) = U_B(F) + U_B(2F) + U_B(N_B).$$

Определим перемещения сечения B от силы F , для чего к основной системе прикладываем только силу F (рис. 2.47, а). Далее строим эпюру внутренних сил по высоте бруса — эпюру N , а затем эпюру перемещений U . При построении эпюры перемещений необходимо разбить длину стержня на два участка. Границей участков служат сечения, проходящие через точки приложения внешних сил. Нумерация участков производится от неподвижного сечения бруса, от которого начинают строить эпюру перемещений. На участке I осевое перемещение любого поперечного сечения определяется из зависимости

$$U_I = \frac{N_I z_I}{ES_I} = \frac{F z_I}{ES}, \text{ что справедливо для } 0 \leq z_I \leq l.$$

В силу линейности функции $U_I(z_I)$ достаточно определить два ее значения и, отметив эти точки на эпюре перемещений U , соединить их прямой линией. При $z_I = 0$ $U = 0$, а при $z_I = l$ $U_I = \frac{Fl}{ES}$. Таким образом, эпюра на участке I построена.

На участке II перемещение любого сечения определится так:

$$U_{II} = \frac{Fl}{ES} + \frac{N_{II}}{ES_{II}}(z_{II} - l), \text{ что справедливо для } l \leq z_{II} \leq 3l.$$

Поскольку на участке II внутренние силы в поперечном сечении равны нулю, то

$$U_{II} = \frac{Fl}{ES}$$

и будет постоянно по всей длине стержня.

Теперь к основной системе прикладываем силу $2F$ (рис. 2.47, б) и строим эпюру внутренних сил N . От действия силы $2F$ стержень сжимается.

Для построения эпюры перемещений U разбиваем длину стержня на три участка. На участке I

$$U_I = \frac{N_I z_I}{ES_I} \text{ для } 0 \leq z_I \leq 2l.$$

$$\text{При } z_I = 0 \text{ } U = 0, \text{ а при } z_I = 2l \text{ } U_I = \frac{-2F \cdot 2l}{ES} = -\frac{4Fl}{ES}.$$

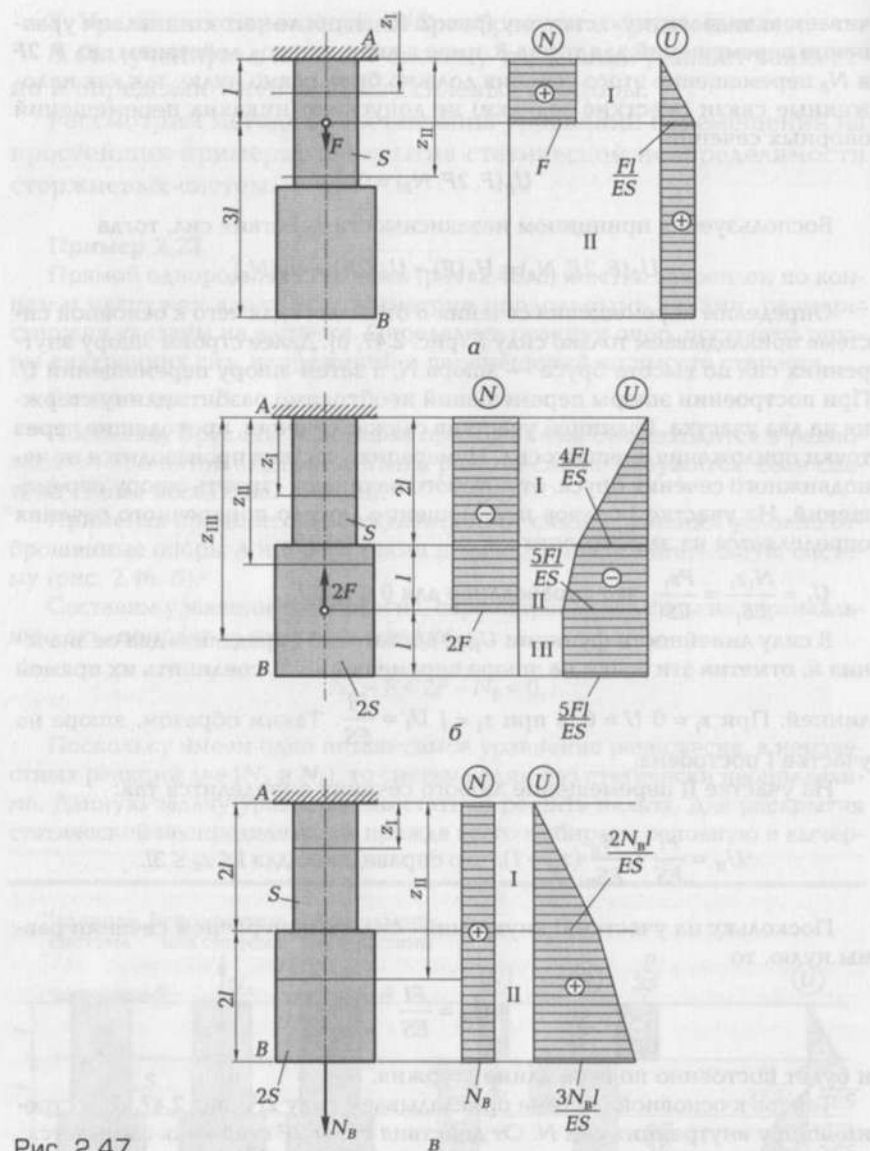


Рис. 2.47

На участке II перемещения определяются из зависимости

$$U_{II} = -\frac{4Fl}{ES} + \frac{N_{II}}{ES_{II}}(z_{II} - 2l) \text{ для } 2l \leq z_{II} \leq 3l.$$

На границе этого участка абсолютное перемещение сечения (при $z_{II} = 3l$)

$$U_{II} = -\frac{4Fl}{ES} + \frac{-2F \cdot l}{E \cdot 2S} = -\frac{5Fl}{ES}.$$

На участке III

$$U_{III} = -\frac{5Fl}{ES} + \frac{N_{III}}{ES_{III}}(z_{III} - 3l) \text{ для } 3l \leq z_{III} \leq 4l.$$

Поскольку на участке III нормальная сила $N_{III} = 0$, то перемещение сечения B

$$U_{III} = -\frac{5Fl}{ES} + 0 = -\frac{5Fl}{ES}.$$

Следовательно, перемещение $U_B(2F) = -\frac{5Fl}{ES}$.

Наконец, строим эпюры внутренних сил и перемещений от силы N_B (рис. 2.47, в).

При построении эпюры перемещений имеем два участка: I и II.

На участке I

$$U_I = \frac{N_I \cdot z_I}{ES_I} \text{ для } 0 \leq z_I \leq 2l.$$

При $z_I = 0$ $U_I = 0$ и при $z_I = 2l$ $U_I = \frac{+N_B \cdot 2l}{ES}$ по двум точкам строим эпюру перемещений на участке I.

На участке II

$$U_{II} = \frac{+N_B \cdot 2l}{ES} + \frac{N_{II}}{ES_{II}}(z_{II} - 2l) \text{ для } 2l \leq z_{II} \leq 4l.$$

$$\text{При } z_{II} = 4l \quad U_{II} = \frac{+N_B \cdot 2l}{ES} + \frac{N_B \cdot 2l}{E \cdot 2S} = \frac{3N_B l}{ES}.$$

Итак, от силы N_B сечение B получит осевое перемещение

$$U_B(N_B) = +\frac{3N_B l}{ES}.$$

В результате мы получили:

$$U_B(F) = \frac{Fl}{ES}, \quad U_B(2F) = -\frac{5Fl}{ES} \text{ и } U_B(N_B) = +\frac{3N_B l}{ES}.$$

Выполняя условие $U_B(F, 2F, N_B) = U_B(F) + U_B(2F) + U_B(N_B)$, сложим полученные значения перемещений сечения B и приравняем их сумму к нулю, так как это сечение не может перемещаться:

$$\frac{Fl}{ES} - \frac{5Fl}{ES} + \frac{3N_B l}{ES} = 0.$$

Из данного уравнения определяем $N_B = +\frac{4}{3}F$.

Полученный положительный знак означает, что произвольно выбранное направление реакции N_B было верным.

Статическая неопределимость раскрыта, поэтому можно построить эпюры внутренних сил, напряжений и перемещений по высоте бруса для заданной схемы нагружения (см. рис. 2.46, г, е) путем последовательного сложения эпюр на рис. 2.47, а, б, в.

На эпюре внутренних нормальных сил скачки должны соответствовать значениям приложенных сосредоточенных сил, а перемещение сечения В должно обратиться в нуль.

Пример 2.24

Для заданной системы нагружения стального ступенчатого бруса (рис. 2.48, 2.49, а):

- 1) определить минимальное значение нагрузки $F = F_1$, при которой перекроется зазор;
- 2) построить эпюры внутренних сил, напряжений и перемещений для нагрузки $F = 2F_1$;
- 3) провести проверочный расчет на прочность, если $[\sigma]_p = [\sigma]_{сж} = 160 \text{ Н/мм}^2$, $a = 1 \text{ мм}$, $l = 1,2 \text{ м}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$.

Решение.

Система остается статически определимой до тех пор, пока удлинение от заданной силы не превосходит зазора:

$$\sum \frac{N_i \Delta l_i}{ES_i} \leq a.$$

Полагая $F = F_1$, последовательно строим эпюры N , σ и U , тем самым определяем осевое перемещение свободного торца:

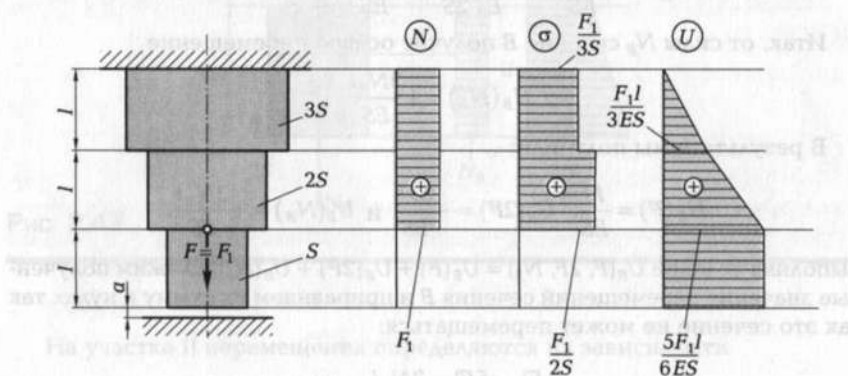


Рис. 2.48

$$\frac{5 F_1 l}{6 ES} \leq a.$$

Отсюда находим минимальное значение силы F_1 , при которой перекрывается зазор:

$$F_1 = \frac{6aES}{5l}.$$

При дальнейшем увеличении силы задача становится статически неопределимой.

Приложим силу $F = 2F_1$. Под действием этой силы зазор перекрывается (рис. 2.49, б) и возникают опорные реакции N_A и N_B . Поскольку имеем одно независимое уравнение равновесия

$$N_A + 2F_1 - N_B = 0,$$

а неизвестных величин две — N_A и N_B , то задача один раз статически неопределима.

Для раскрытия статической неопределимости из условий деформации бруса составляем дополнительное уравнение перемещений сечения B в эквивалентной системе (рис. 2.49, в):

$$U(2F_1, N_B) = a.$$

Применяя принцип независимости действия сил, вычислим перемещение опорного сечения B :

от действия силы $2F_1$

$$U_B = +\frac{2F_1 l}{E \cdot 3S} + \frac{2F_1 l}{E \cdot 2S} = +\frac{5 \cdot 2F_1 l}{3 ES};$$

от действия силы N_B

$$U_B = -\frac{N_B l}{E \cdot 3S} - \frac{N_B l}{E \cdot 2S} - \frac{N_B l}{ES} = -\frac{11 N_B l}{6 ES}.$$

Следовательно,

$$U(2F_1, N_B) = +\frac{5 F_1 l}{3 ES} - \frac{11 N_B l}{6 ES} = a.$$

Заменив F_1 на $\frac{6aES}{5l}$, определим опорную реакцию N_B :

$$N_B = \frac{6 a}{11 l} ES.$$

Опорная реакция N_B получилась с положительным знаком, следовательно, первоначально выбранное направление этой реакции было верным.

Выразим опорную реакцию N_B через силу F_1 , равную $\frac{6aES}{5l}$. В результате имеем

$$N_B = \frac{5}{11} F_1.$$

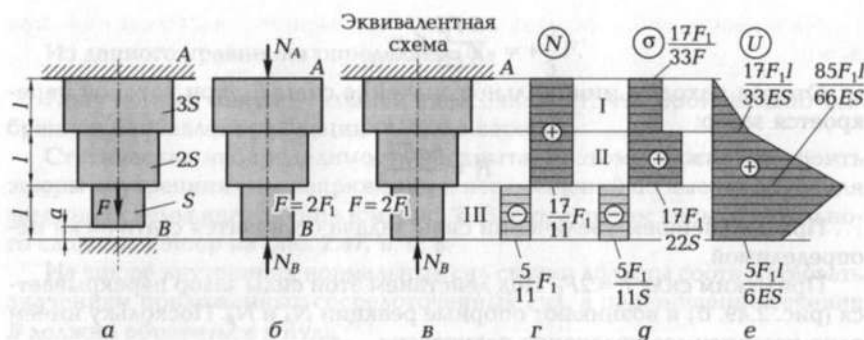


Рис. 2.49

Теперь можно перейти к построению эпюр внутренних сил (рис. 2.49, г), начиная от нижнего конца бруса на эквивалентной схеме.

При построении эпюры нормальных напряжений для вычисления $\sigma_i = \frac{N_i}{S_i}$ высоту бруса разбиваем на три участка (I, II, III), на каждом из которых внутренние силы и площадь поперечного сечения остаются постоянными (рис. 2.49, г).

Эпюру перемещений U строим от неподвижного сечения А эквивалентной схемы; число участков также будет три. Построение эпюры перемещений (рис. 2.49, е) аналогично рассмотренному в примере 2.23.

После построения всех эпюр осуществляем проверки. На эпюре внутренних сил скачок должен быть равен приложенной сосредоточенной силе $2F_1$:

$$+\frac{17}{11}F_1 - \left(-\frac{5}{11}F_1\right) = 2F_1.$$

Подсчет показал, что эпюра внутренних сил построена верно.

На эпюре U перемещение нижнего торца В должно быть равно зазору a . Проверяем, подставив вместо силы F_1 ее значение:

$$\frac{5}{6} \frac{F_1 l}{ES} = \frac{5}{6} \frac{6aES}{5l} \frac{l}{ES} = a.$$

Следовательно, все эпюры построены верно.

Теперь переходим к выполнению третьего пункта задания — осуществляем проверочный расчет на прочность.

Анализируя эпюру нормальных напряжений (см. рис. 2.49, г), приходим к выводу, что наибольшее напряжение возникает в поперечных сечениях бруса на участке II. Следовательно, проверочный расчет на прочность необходимо выполнять по напряжению $\sigma_{\text{наиб}} = \frac{17}{22} \frac{F_1}{S}$ из условия

прочности

$$\sigma_{\text{наиб}} \leq [\sigma].$$

Воспользовавшись исходными данными, вычислим наибольшее напряжение, возникающее в поперечных сечениях бруса на участке II:

$$\sigma_{\text{наб}} = \frac{17 F_1}{22 S} = \frac{17 \cdot 6aES}{22 \cdot 5l \cdot S} = \frac{17 \cdot 6aE}{22 \cdot 5l} = \frac{17 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10^5}{22 \cdot 5 \cdot 1200} = 154,3 \text{ Н/мм}^2.$$

Так как допускаемое напряжение по условию задачи $[\sigma] = 160 \text{ Н/мм}^2$, то удовлетворяется неравенство $\sigma_{\text{факт}} \leq [\sigma]$, т.е. $154,3 < 160$. Следовательно, брус работает с недогрузкой.

Процент недогрузки можно вычислить:

$$\frac{160 - 154,3}{160} 100 \% = 3,56 \%.$$

Методика раскрытия статической неопределимости в задачах такого типа остается неизменной для любого значения силы F . Вопрос о раскрытии статической неопределимости в случае, когда брус, жестко заделанный одним концом, имеет небольшой зазор между свободным торцом и некоторой плоскостью (рис. 2.49, а), возникает только тогда, когда все суммарные нагрузки F_i вызывают такое удлинение стержня, которое превосходит величину этого зазора. Поэтому прежде чем приступить к раскрытию статической неопределимости, необходимо определить перемещение свободного торца бруса под действием всех заданных сил и сопоставить с величиной зазора.

Эти замечания в равной степени можно отнести и к задачам, где статическая неопределимость возникает в результате нагрева стержня, у которого свободный конец имеет небольшой зазор по отношению к неподвижной плоскости или к торцу другого стержня.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем отличаются упругие деформации от остаточных?
2. Расскажите о методе сечений.
3. Запишите закон Гука при растяжении (сжатии).
4. Что такое относительное удлинение?
5. Какие эпюры необходимо построить, чтобы выполнить расчет на прочность при растяжении?
6. Что общего в диаграммах растяжения образца и материала и в чем их различие?
7. Что такое предел упругости?
8. Приведите обозначения модуля упругости I рода и коэффициента Пуассона.

9. До какого напряжения справедлив закон Гука?
10. Для чего вводится понятие «допускаемое напряжение»?
11. Какие напряжения возникают в поперечном сечении при кручении образца?
12. Запишите закон Гука для сдвига.
13. Какая зависимость существует между модулем упругости I рода и модулем G ?
14. Что такое смятие? Как определяется напряжение при смятии?
15. Что такое полярный момент сопротивления?
16. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении бруса при его изгибе?
17. Чем отличается чистый изгиб от поперечного?
18. Что такое главные центральные оси сечения и чем они отличаются от главных осей?
19. Как определяются знаки изгибающих моментов и поперечных сил?
20. Какие напряжения возникают в поперечном сечении при изгибе?
21. Два бруса одинакового поперечного сечения подвергаются нагрузке, в результате чего возникают переменные напряжения с одинаковым коэффициентом асимметрии R . Первый брус работает на изгиб, а второй — на растяжение — сжатие. У какого бруса раньше начнется усталостное разрушение?
22. Что такое устойчивость?
23. По какому напряжению ведется расчет бруса, на который действуют одновременно изгибающий и крутящий моменты?
24. Какие строительные конструкции при расчетах можно представить в виде двухопорной балки?
25. Назовите факторы, влияющие на значение предела выносливости.
26. Груз равномерно ускоренно опускается на тросе вниз. Каково будет динамическое напряжение в поперечном сечении троса?
27. По какой формуле рассчитывается критическое напряжение продольно сжатого стержня, если напряжение в поперечном сечении превышает предел пропорциональности?
28. Какова последовательность раскрытия статической неопределимости стержневых систем, работающих на сжатие?
29. Какие требования предъявляются при выборе основной системы при раскрытии статической неопределимости стержневых систем?

Глава 3

ДЕТАЛИ И МЕХАНИЗМЫ МАШИН

3.1. МАШИНЫ И ИХ ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Человек создал машины для производства различных видов работ или преобразования энергии. Современные машины значительно повышают производительность труда человека. Например, человек в течение длительного времени может развивать мощность не более 0,1 кВт, а мощность машин — преобразователей энергии достигает 1 200 МВт.

Слово «машина» произошло от латинского слова *machine*, что означает сооружение, и используется для названия технических устройств, предназначенных для преобразования энергии в полезную работу. В современной терминологии понятия «машина» и «техническое устройство» определены ГОСТ 23004—78: «Механизация и автоматизация технологических процессов в машиностроении и приборостроении».

Техническим устройством называется изделие машиностроения или приборостроения для преобразования, добычи, перемещения, контроля объектов или управления ими. К техническим устройствам относят машины, инструменты, приспособления и т. д. Объектами воздействия технических устройств могут быть материалы, заготовки, изделия, энергия, информация, ископаемые, растения и т. д.

Если техническое устройство функционирует при участии людей и управляется ими, то оно называется **ручным** техническим устройством, например коловорот (ручная дрель). Если же техническое устройство функционирует при последовательном применении мускульной энергии людей и энергии неживой природы (например, электродвигатель, пневмо- или гидромотор) и управляется людьми, то оно называется **механизированным** техническим устройством; примером может служить электрическая дрель.

Автоматическое устройство функционирует и управляется по заданному алгоритму с использованием энергии неживой природы без непосредственного участия человека.

Машиной называется отдельное техническое устройство, состоящее из энергетической, передаточной, исполнительной и управляющих составных частей и выполняющее механические движения для непосредственного преобразования состояния материала, энергии или информации.

Все машины можно классифицировать на энергетические и рабочие. К энергетическим машинам относятся компрессоры, генераторы, гидротурбины и т. п., вырабатывающие энергию. Рабочие машины подразделяются на технологические (металлорежущие станки, контрольно-сортировочные автоматы, кузнечно-прессовое оборудование), транспортные (роботы, подъемные краны, конвейеры) и электронные (электронно-вычислительные машины, компьютеры).

Любая машина состоит из двигательного, передаточного и исполнительного механизмов. Например, у металлорежущего станка двигательным механизмом является электромотор, а у автомобиля — двигатель внутреннего сгорания; исполнительным механизмом (его также называют рабочим органом) у токарного станка является суппорт с режущим инструментом, а у автомобиля — колеса.

Передающие механизмы, состоящие из рычагов, валов, шкивов, ремней, зубчатых колес и т. д., преобразовывают и передают движение от двигателя к рабочим органам. Так, в токарном станке движение от электродвигателя к суппорту, т. е. исполнительному механизму, передается через ременную передачу, коробку скоростей, коробку подач, ходовой винт и ряд зубчатых кинематических пар. В автомобиле функцию передающих механизмов выполняют коробка скоростей и карданный вал. Таким образом, механизм — это внутреннее устройство машины, приводящее ее в действие. Слово «механизм» произошло от латинского слова *mēchanē*, что в переводе означает орудие.

Более строго, **механизмом** называется техническое устройство, состоящее из системы твердых тел (звеньев механизма), предназначенное для передачи и преобразования движений и скоростей одного или нескольких тел (ведущих) в требуемые движения остальных тел системы.

Детали — это составные части машин и механизмов, каждая из которых изготовлена без применения сборки (например, вал, шестерня, болт, шплинт, гайка, винт вертолета). Число деталей в

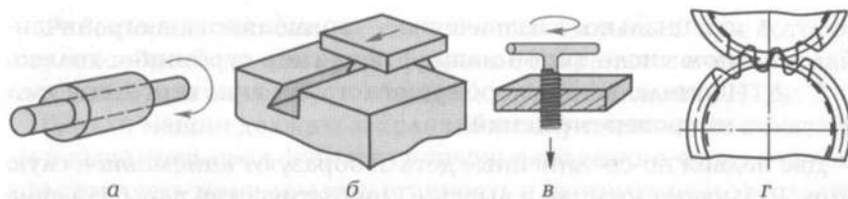


Рис. 3.1

сложных машинах может измеряться десятками и сотнями тысяч. Например, в автомобиле более 15 тыс. деталей, в автоматизированных комплексах прокатного оборудования — более миллиона.

В машине можно выделить совокупность совместно работающих деталей, которые представляют собой конструктивно обособленные единицы, объединенные одним назначением; эти сборочные единицы называют **узлами**. Узлы одной машины можно изготавливать на разных заводах. Примерами таких узлов являются муфты, редукторы, электрошпиндели, шарикоподшипники.

Детали машин и узлы бывают:

- общего назначения — используются во многих типах машин; это болты, шпильки, гайки, зубчатые колеса, шпинты, штифты, шпонки, подшипники качения, муфты, шайбы, редукторы;

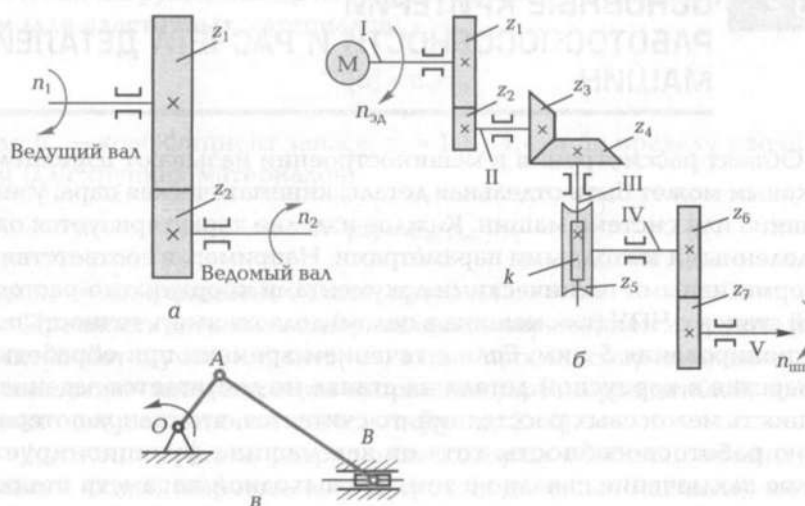


Рис. 3.2

- специального назначения — применяются в ограниченном числе типов машин, например турбинное колесо, шпиндель металлорежущего станка, винт вертолета, узел микроперемещений.

Две подвижно-соединенные детали образуют **кинематическую пару**. Различают низшие и высшие кинематические пары. Низшие пары имеют соприкосновение элементов по поверхности, высшие — по линиям или в точках.

На рис. 3.1 представлены соответственно низшие (рис. 3.1, а — вращательная; рис. 3.1, б — поступательная; рис. 3.1, в — винтовая) и высшая (рис. 3.1, г — зубчатая) кинематические пары.

Тела, образующие кинематическую пару, называются **звеньями**.

Совокупность звеньев подвижно-соединенных кинематических пар называется **кинематической цепью**.

На рис. 3.2 представлены кинематические цепи, состоящие из пары зубчатых колес (рис. 3.2, а), а также цилиндрических, конической и червячной пар (рис. 3.2, б). Если в кинематической цепи закрепить одно звено, то оно становится механизмом (рис. 3.2, в).

В машиностроении при вычерчивании различных кинематических пар приняты условные обозначения, утвержденные ГОСТ 2.770—68* «Обозначения условные графические в схемах. Элементы кинематики» (см. Приложение V).

3.2. ОСНОВНЫЕ КРИТЕРИИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ И РАСЧЕТА ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Объект рассмотрения в машиностроении называют **изделием**. Таковым может быть отдельная деталь, кинематическая пара, узел, машина или система машин. Каждое изделие характеризуется определенными выходными параметрами. Например, в соответствии с нормативными техническими документами координатно-расточный станок с ЧПУ (т. е. машина в целом) должен иметь точность позиционирования 5 мкм. Если с течением времени при обработке отверстия в корпусной детали на станке не достигается заданная точность межосевых расстояний, то считается, что станок потерял свою работоспособность, хотя он как машина функционирует. Такое заключение связано с тем, что выходной параметр станка (точность позиционирования) вышел за предел, установленный нормативно-технической документацией (НТД).

Работоспособность — это состояние изделия, при котором оно способно выполнять свои функции, сохраняя значения заданных выходных параметров в пределах, установленных НТД.

Детали машин должны сохранять эксплуатационные показатели и выполнять свои функции в течение заданного срока службы, а также иметь минимальную стоимость изготовления и эксплуатации.

Работоспособность изделий характеризуется определенными критериями. Важнейшими из них являются прочность, точность, жесткость, виброустойчивость, стойкость к тепловым воздействиям, износостойкость, надежность. По одному или по нескольким из них рассчитывают размеры деталей машин и выбирают материалы.

Прочность

Расчеты на прочность деталей машин осуществляют по допускаемым напряжениям, коэффициентам запаса прочности или вероятности безотказной работы.

Расчеты по допускаемым напряжениям наиболее просты и удобны, используются для машин массового производства, опыт эксплуатации которых значителен.

Прочность деталей, например станков, исключает аварийные ремонты из-за их поломки. Поэтому допускаемое напряжение статически нагруженных деталей рассчитывают по пределу текучести (для пластичных материалов)

$$[\sigma] = \sigma_T / n_T,$$

где n_T — коэффициент запаса, $n_T = 1,1 \dots 1,4$, и по пределу прочности (для хрупких материалов)

$$[\sigma] = \sigma_B / n_B,$$

где n_B — коэффициент запаса, $n_B = 3 \dots 4$.

Прочность деталей, подвергающихся переменной нагрузке, рассчитывают с учетом факторов, влияющих на сопротивление при усталости — концентрации напряжений, размеров деталей, состояния поверхностного слоя (см. подразд. 2.10).

Для конструкций, разрушение которых особенно опасно для жизни людей (паровые котлы, грузоподъемные машины), метод расчета и выбор коэффициентов запаса прочности регламентирован нормами государственного технического надзора.

Точность

Точность деталей машин включает в себя точность формы и размеров отдельных участков детали, а также точность взаимного положения этих участков.

Точность обработки характеризуется значениями допущенных при обработке погрешностей, т.е. отступлением размеров обработанной детали от заданных по чертежу. Погрешности обработки должны находиться в пределах допусков.

Кроме того, необходимо при обработке изделия получить заданную чистоту поверхности, которая непосредственно зависит от метода обработки и режимов резания.

Точность машины будет в первую очередь зависеть от точности и чистоты поверхностей ее деталей.

Однако при проектировании и изготовлении машин нужно учитывать и другие факторы, которые могут снижать их точность.

Рассмотрим металлорежущий станок. В координатно-расточном станке под влиянием усилий, возникающих при резании, узлы деформируются и изменяют свое относительное положение. В результате этого происходит искажение траекторий движения инструмента относительно заготовки.

Точность обработки изделия при этом будет снижаться. Следовательно, на точность координатно-расточного станка (т.е. машины) оказывает влияние жесткость его узлов.

Кроме того, точность измерительных и отсчетных устройств этого станка, предназначенных для перемещения стола с изделием относительно инструмента, также будет оказывать большое влияние на точность обработки. Следовательно, этот фактор будет влиять на точность станка.

Неточность обработки на станке может возникнуть в результате температурных деформаций узлов и деталей станка, а также вследствие снижения качества зубчатых колес и ходового винта, которое влияет на точность кинематической цепи станка. Особенно это актуально для зуборезных, винторезных, зубо- и резьбошлифовальных станков.

Кинематическая точность в зуборезных станках существенно зависит от точности изготовления и монтажа червяка и червячного колеса в делительной цепи.

При конструировании других машин (автомобилей, самолетов, подъемных кранов) должны быть учтены конкретные факторы, которые могут снижать точность проектируемой машины.

Жесткость

Критерий жесткости в машинах является одним из важнейших. Особенно большое значение он имеет в станкостроении. Например, прецизионные станки приходится проектировать значительно более массивными, чем другие машины для тех же нагрузок и мощностей.

Жесткость станка влияет на точность обработки, виброустойчивость и долговечность.

Жесткостью узла называется его способность сопротивляться появлению упругих отжатий под действием нагрузки. Она может быть определена как отношение силы F , Н, приложенной к узлу в заданном направлении, к упругому отжатию этого узла δ , мм:

$$j = F/\delta.$$

Износостойкость

В результате постепенного изменения поверхностей трения при взаимодействии двух сопряженных деталей происходит изнашивание. **Изнашивание** представляет собой процесс постепенного уменьшения размеров и изменения формы деталей. По статистике большинство деталей машин выходит из строя из-за изнашивания, при котором в миниатюре происходят те же процессы: пластические и упругие деформации, сдвиг, усталостные разрушения.

Для большинства деталей наиболее характерно абразивное изнашивание. Абразивные частицы могут попадать извне в смазку или непосредственно на трущиеся поверхности; вследствие резания или царапания с отделением микростружки они разрушают эти поверхности.

Кроме того, при относительном перемещении двух поверхностей микровыступы испытывают переменные напряжения, вследствие чего в дальнейшем наступит усталостное разрушение. Появляются микротрещины, что способствует отделению частичек материала.

Таким образом, изнашивание при перемещении двух поверхностей сопровождается абразивным изнашиванием за счет отделившихся частиц.

В большинстве случаев можно наблюдать три стадии изнашивания (рис. 3.3): I — период приработки; II — установившееся (или нормальное) изнашивание; III — катастрофическое изнашивание.

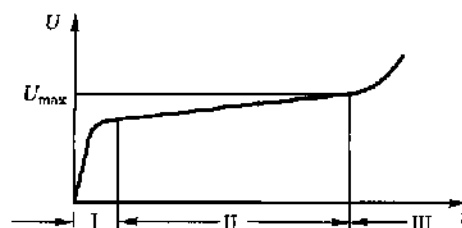


Рис. 3.3

Период нормальной эксплуатации машин (II стадия изнашивания) характеризуется линейной зависимостью между временем изнашивания t и износом U , мкм. Скорость изнашивания γ на этой стадии остается постоянной: $\gamma = U/t$. Для абразивного и усталостного изнашивания значение износа можно определить по следующей зависимости:

$$U = k p v_{\text{отн}} t,$$

где k — коэффициент, зависящий от материала пар трения, смазки, микронеровностей и других факторов; p — давление; $v_{\text{отн}}$ — скорость относительного скольжения.

Исключив время t , получим

$$\gamma = k p v_{\text{отн}}.$$

Для конкретных пар можно экспериментально определить коэффициент k и в дальнейшем прогнозировать долговечность работы многих деталей: направляющих скольжения станков, кулисных механизмов, дисков фрикционных муфт, ходовых винтов и гаек скольжения.

Изнашивание вызывает резкое удорожание эксплуатации машин в связи с необходимостью периодической проверки их технического состояния, а также ремонта. Это, в свою очередь, связано с простоями и снижением производительности машин.

Износостойкость могут повысить следующие мероприятия: смазывание трущихся поверхностей; применение износостойких материалов; защита поверхностей от загрязнения; перенос усилий с ответственных механизмов на менее ответственные (например, наружную поверхность на токарном станке обтачивают при включенном ходовом вале, а ходовой винт отключают); разгрузка изнашиваемых поверхностей и др.

Стойкость к тепловым воздействиям

Работа машины сопровождается тепловыделением, которое обусловлено рабочим процессом машин и трением в их механизмах. Тепловыделение, связанное с рабочим процессом, особенно интенсивно у тепловых двигателей, электрических машин, литейных машин и машин для горячей обработки материалов.

В результате теплового воздействия возникают температурные деформации, которые могут отрицательно влиять на работоспособность машин:

- понижать защитную способность масляного слоя на трущихся поверхностях и, следовательно, вызывать повышенное изнашивание или заедание;
- изменять зазоры в подвижных соединениях;
- понижать точность машин (например, в металлорежущих станках в результате нагрева передней опоры шпинделя может произойти отклонение его оси, что приведет к снижению точности обработки).

Температурные деформации узлов машин можно рассчитать, если известны температурные поля в деталях машины.

При эксплуатации металлорежущих станков, контрольно-измерительных машин и другого прецизионного оборудования применяют следующие методы борьбы с температурными деформациями:

- вынос механизмов с тепловыделением за пределы технологического оборудования (например, гидростанций и гидросистем);
- использование смазочно-охлаждающей жидкости (СОЖ) в зоне резания металлорежущих станков;
- принудительное охлаждение узлов;
- создание термоконстантных цехов, в которых поддерживается постоянная температура;
- выравнивание температурного поля путем искусственного подогрева или охлаждения отдельных узлов;
- автоматическая компенсация температурных деформаций — применение коррекционных линеек, использование предсказания программы в станках с ЧПУ.

Виброустойчивость

Под виброустойчивостью понимают способность конструкций работать в заданном диапазоне без недопустимых колебаний.

В связи с увеличением скоростей машин колебания становятся все более опасными. Если частота собственных колебаний узлов машины совпадет с частотой вынужденных колебаний, наступит резонанс. Это самое опасное состояние машины в целом, так как может произойти разрушение. Вибрации также нежелательны. В металлорежущем станке, например, вибрации ухудшают обрабатываемую поверхность, уменьшают долговечность станка, ограничивают его технологические возможности. В машинах в основном наблюдаются вынужденные, параметрические колебания и автоколебания.

Вынужденные колебания возникают под действием внешней периодически изменяющейся силы по следующим причинам:

- дисбаланс вращающихся деталей (например, ротора электродвигателя);
- ошибки в шаге зубчатых колес (вход в зацепление будет сопровождаться ударом);
- наличие прерывистой силы резания при фрезеровании, долблении, затывании, протягивании;
- наличие внешних источников колебаний.

Параметрические колебания возникают при наличии какого-либо переменного параметра, например момента инерции поперечного сечения. Предположим, что на вращающийся вал действует постоянная сила. Если поперечное сечение вала — окружность, у которой моменты инерции относительно всех осей одинаковые, то никаких колебаний не возникает. Если же в поперечном сечении имеется прямоугольник (так выполнена у вала может быть и внутренняя полость), то вал под действием постоянной силы будет прогибаться по-разному, так как моменты инерции у прямоугольника относительно взаимно-перпендикулярных осей различны.

Автоколебания, или незатухающие самоподдерживающие колебания, характеризуются тем, что возмущающие силы возникают в самом процессе колебания. При автоколебательном процессе в случае прекращения колебаний системы перестают существовать переменные силы, поддерживающие эти колебания. Примером могут служить автоколебания при трении (фрикционные колебания при медленном перемещении столов, суппортов станка по направляющим скольжения). Причиной этих колебаний является переменность силы трения в зависимости от изменения скоростей. Другим примером автоколебаний являются самовозбуждающиеся колебания в металлорежущих станках при резании.

Повышение жесткости узлов машины способствует снижению автоколебаний. Колебания чаще всего сопровождаются шумом, который связан с соударением движущихся деталей. Например, погрешности шага и профиля зубьев зубчатых колес приводят к соударению при входе в зацепление. Повышенный уровень шума увеличивает утомляемость персонала и, следовательно, вреден для здоровья. Уровень шума измеряется в децибелах (дБ), его предельное значение ограничивается санитарными нормами.

Основные меры борьбы с шумом: повышение точности и чистоты обработки, уменьшение силы удара конструктивными методами, применение демпферов и материалов с повышенным внутренним трением.

Надежность

Проблема надежности является одной из основных в машиностроении. Свойство изделия сохранять работоспособность в течение заданного промежутка времени, обусловленное безотказностью и долговечностью изделий, называется *надежностью*.

Известный авиаконструктор А.Н.Туполев говорил: «Чем дальше от доски конструктора обнаруживается ненадежность, тем она дороже обходится». Ненадежная машина не сможет эффективно функционировать, так как каждая ее остановка из-за повреждения отдельных элементов или снижения технических характеристик ниже допустимого уровня влечет за собой материальные убытки, а в отдельных случаях и катастрофические последствия.

Из-за недостаточной надежности промышленность несет огромные потери. Так, за весь период эксплуатации затраты на ремонт и техническое обслуживание машин в связи с их изнашиванием в несколько раз превышают стоимость новой машины: для автомобилей — до 6 раз, для самолетов — до 5, для станков — до 8, для радиотехнической аппаратуры — до 12 раз. Из-за коррозии ежегодно теряется до 10 % выплавленного металла.

Надежность закладывается при проектировании и расчете машины. При изготовлении машины надежность обеспечивается; она зависит от качества изготовленных деталей, качества сборки узлов машины, методов контроля и испытания готовой продукции и других показателей технологического процесса. При эксплуатации машины реализуется ее надежность.

Показатели безотказности и долговечности проявляются только при эксплуатации, зависят от условий использования машины, системы ее ремонта и технического обслуживания.

Безотказность — это свойство изделия непрерывно сохранять работоспособность в течение заданного периода времени. В это понятие не включаются техническое обслуживание, ремонт, подналадка. Изделие должно сохранять свои начальные параметры в допустимых пределах.

Долговечность — свойство изделия сохранять работоспособность в течение всего периода эксплуатации до предельного состояния. Здесь учитываются все ремонты, подналадки.

Полная или частичная утрата работоспособности изделий называется **отказом**. По своей природе отказы могут быть связаны с разрушением поверхностей или самих деталей (выкрашивание, износ, коррозия, поломки) либо не связаны с разрушением (ослабление предварительного натяга подшипников, засорение каналов). Отказы бывают полные или частичные, внезапные (поломки) или постепенные (изнашивание, коррозия), опасные для жизни человека или нет, устранимые и неустраиваемые.

Показатели безотказности и долговечности изделия определяются в соответствии с теорией вероятности. Вероятность безотказной работы $P(t)$ в течение заданного времени t (или заданной наработки) и вероятность отказа $F(t)$ — взаимно противоположные события. Их сумма всегда равна единице. Вероятность безотказной работы находится в пределах $0 \leq P(t) \leq 1$. Например, за время $t = 100$ ч вероятность безотказной работы составляет $P(t) = 0,99$. Это следует понимать так: за указанное время работы изделия вероятность отказа составит 1 %, т. е. $F(t) = 0,01$.

Основным показателем долговечности элемента изделия является **срок службы (наработка) t** до отказа.

При оценке надежности изделия очень важны экономические показатели. Повышение безотказности и долговечности машин связано с дополнительными материальными затратами.

3.3. МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

По форме и назначению детали машин чрезвычайно разнообразны, одни должны обладать повышенной коррозионной стойкостью, другие — быть сверхпроводимыми, третьи — характеризоваться особыми магнитными свойствами, поэтому для их изготовления необходимы материалы с различными свойствами.

Различают **конструкционные** материалы, которые используют для производства деталей машин, и **инструментальные** материалы, из которых изготавливают режущие инструменты.

В качестве конструкционных материалов используют различные металлы (алюминий, железо, медь, титан), сплавы металлов (железоуглеродистые — чугуны, сталь; магниевые; медно-цинковые — латуни; медно-оловянные — бронзы; сплавы алюминия и др.), неметаллы (пластмассы, древесина, текстолиты, стеклотекстолиты) и композиционные материалы.

Композиционные материалы являются сравнительно новыми конструкционными материалами. Для их получения в основной материал добавляют наполнители, которые определяют свойства композиционного материала. Размеры входящих компонентов колеблются от долей микрометра (для порошковых наполнителей) до нескольких миллиметров (у волокнистых наполнителей).

Порошковая металлургия позволяет получать композиционные материалы, характеризующиеся жаропрочностью и износостойкостью, стабильными магнитными и другими свойствами. Порошковая металлургия дает возможность получать псевдосплавы из таких несплавлиющихся металлов, как медь — вольфрам, серебро — вольфрам, которые обладают высокой электрической проводимостью и стойкостью к электроэрозионному изнашиванию; из них изготавливают электроконтактные детали.

Композиционные материалы на основе пластмасс характеризуются высокой химической и коррозионной стойкостью. Они с успехом замещают дорогостоящие цветные металлы.

Композиционные материалы на основе резины существенно отличаются от металлов. Они способны выдерживать значительные деформации без разрушения, обладают высокой сопротивляемостью к изнашиванию, газо- и водонепроницаемостью, диэлектрическими свойствами.

Особое место среди композиционных материалов занимают волокнистые материалы. В качестве волокнистых наполнителей используют проволоки из вольфрама, молибдена, волокна оксидов алюминия, бора, карбида кремния, графита.

Стекло, керамические, древесные и другие неметаллические материалы имеют свои специфические физико-механические и эксплуатационные свойства.

Тип конструкционного материала выбирают в зависимости от его физико-механических и эксплуатационных свойств, на которые влияет технологический процесс получения как самих материалов, так и деталей из них.

Детали различных форм получают из заготовок при помощи режущих инструментов. Режущие инструменты работают в условиях больших нагрузок, высоких температур, трения и изнашивания.

ния, поэтому инструментальные материалы должны иметь особые эксплуатационные и физико-механические свойства. Материал режущей части инструмента должен характеризоваться большой твердостью и высокими допускаемыми напряжениями на растяжение, сжатие, кручение и изгиб. Кроме того, режущий инструмент должен обладать достаточной вязкостью, чтобы воспринимать ударную нагрузку при обработке заготовок из хрупких материалов и с прерывистой поверхностью резания. Режущий инструмент должен сохранять свою твердость, а также режущие свойства при высоких температурах, поэтому инструментальные материалы должны иметь высокую теплоустойчивость.

К режущей части инструмента предъявляют высокие требования по износостойкости. Это необходимо для того, чтобы детали, обработанные одним и тем же инструментом, имели минимальный разброс размеров. В целях повышения износостойкости на режущую часть инструмента наносят специальными методами одно- и многослойные покрытия из карбидов вольфрама или нитридов титана.

В качестве инструментальных материалов используют инструментальные стали, твердые сплавы, синтетические сверхтвердые и керамические инструментальные материалы, абразивные материалы.

К инструментальным материалам относятся:

- **углеродистые инструментальные стали** с содержанием углерода 1...1,3 %; применяют марки У7, У7А, У8, У8А, У8Г, У8ГА, У9, У9А, У10, У10А, У11, У11А, У12, У12А, У13 и У13А. Из этих сталей изготавливают слесарно-монтажные инструменты (молотки, кувалды, плоскогубцы и острогубцы), напильники, шаберы, калибры простой формы, ручные метчики, плашки, ножовочные полотна, сверла, зенкеры малых размеров;
- **легированные инструментальные стали**; их получают на основе инструментальных сталей с добавлением хрома, вольфрама, ванадия, кремния и других легирующих добавок. Легированные стали по сравнению с углеродистыми имеют повышенную вязкость в закаленном состоянии, более высокую прокаливаемость, меньшую склонность к появлению трещин при закалке. Применяются для изготовления кернеров, метчиков диаметром до 30 мм (марки 8ХВ, 9ХВ, 11ХВ); резьбовых калибров (9ХВГ); протяжек, длинных метчиков, длинных разверток (ХВГ); резьбокатного инструмента: роликов, плашек (Х6ВФ); круглых плашек (ХВСГФ) и др.:

- **быстрорежущие стали** содержат до 19 % вольфрама, поэтому после термообработки до твердости 62...65 HRC имеют теплостойкость 600...650 °С. Для изготовления режущих инструментов используют стали P9, P18 — резцы, фрезы, долбяки, сверла; P6M5 — резцы, фрезы, зенкеры, протяжки, прошивки, резьбонарезной и зуборезный инструмент для обработки цветных сплавов; быстрорежущие стали с добавлением кобальта P9K5 — фрезы, долбяки, метчики для получистовой и черновой обработки заготовок из углеродистых и легированных сталей, а для работы на повышенных режимах резания применяют сталь P9M5K5; для обработки заготовок из жаропрочных и жаростойких сталей, а также коррозионно-стойких применяют сталь P9M4K8.

Поскольку быстрорежущие стали дорогие, то для экономии режущий инструмент изготавливают сборным или сварным. Хвостовик выполняют из конструкционной стали 45, 50, 40Х. Часто пластины из быстрорежущей стали приваривают к державкам или корпусам инструментов.

Быстрорежущие стали обладают высокой износостойкостью; инструменты, изготовленные из них, могут работать со скоростями резания до 100 м/мин;

- **твердые сплавы** применяют в виде пластин определенных форм и размеров, изготавливаемых методом порошковой металлургии. Пластины предварительно прессуют, а затем спекают при температуре 1 500...1 900 °С. Твердые сплавы делят на три группы: вольфрамовую (ВК3, ВК3-М, ВК6-М и т.д.), титановольфрамовую (Т30К4, Т15К6 и т.д.) и титанотанталовольфрамовую (ТТ7К12, ТТ10К8-Б). Пластины из твердого сплава при твердости 86...92 HRC обладают высокой износостойкостью и теплостойкостью 800...1 250 °С. Это позволяет вести обработку со скоростями резания до 800 м/мин. Пластины из твердого сплава припаивают к державкам медными или латунными припоями. Недостатком твердых сплавов является низкая пластичность.

Твердые сплавы группы ВК применяют для обработки хрупких металлов, пластмасс и других неметаллических материалов. Сплавы группы ТК используют при обработке вязких металлов и сплавов. Сплавы группы ТТК отличаются повышенной износостойкостью, поэтому их применяют для обработки сталей аустенитного класса (труднообрабатываемых);

- **синтетические сверхтвердые и керамические инструментальные материалы.** Существует много разнообразных сверхтвердых материалов (СТМ) на основе модификаций нитрида бора: эльбор (композит 01), тексанит-Р (композит 10) и др. Особенность пластин из СТМ состоит в том, что они могут обрабатывать твердые сплавы, чугуны любой твердости, но в основном не выдерживают ударной нагрузки.

Инструментальные керамические материалы (ЦМ332, силинит-Р и др.) используют для чистовой и получистовой обработки заготовок из незакаленных сталей и серых чугунов со скоростями резания до 900 м/мин, а «черную» керамику (ВОК-60) применяют для чистовой и получистовой обработки заготовок из ковких, высокопрочных, отбеленных чугунов и закаленных сталей;

- **абразивные материалы** — это мелкозернистые порошковые вещества, которые используют для изготовления абразивных инструментов: шлифовальных кругов, головок, сегментов, брусков. Естественные абразивные материалы (наждак, кварцевый песок, корунд) применяют весьма ограничено из-за неоднородности их свойств. В промышленности применяют искусственные абразивные материалы: электрокорунды, карбиды бора, оксид хрома, синтетические алмазы, борсилокарбид, славутич, эльбор, тексагонит.

Абразивные материалы имеют высокие твердость, износостойкость и теплостойкость (1 200...1 800 °С). Инструменты из абразивных материалов позволяют обрабатывать заготовки со скоростью резания 15...100 м/с; в основном их используют для финишной обработки, когда предъявляются повышенные требования к точности и шероховатости обработанных поверхностей.

Для притирочных и доводочных работ, например для доводки инструментов из твердых сплавов, а также для шлифования заготовок из очень твердых материалов (рубинов, кварца, корунда), используют шлифовальные порошки из карбида бора. Для изготовления шлифовальных и полировальных паст применяют оксид хрома, венскую известь, трепел.

Борсилокарбид используют для обработки заготовок из твердых сплавов, рубина и других сверхтвердых материалов. Эльбор (кубонит) применяют для обработки заготовок из высокотвердых материалов и конструкционных сталей. Инструменты из славутича не

уступают алмазным по износостойкости и превосходят их по прочности.

В промышленности используют природные (А) и синтетические (АСО, АСР, АСМ и т.д.) алмазы. Алмаз является самым твердым материалом, имеет высокие теплоустойчивость и износостойкость, у него практически не происходит слипания со многими материалами. Недостатком алмазов является повышенная хрупкость. Кристаллы алмазов применяют для оснащения резцов, сверл; алмазы используют при изготовлении инструментов (кругов, пил, лент, брусков).

Алмазный инструмент используют при тонком точении заготовок из сплавов алюминия, бронз, латуней, неметаллических материалов; применяют для обработки заготовок из твердых материалов, германия, кремния, полупроводниковых и керамических материалов, жаропрочных сталей и сплавов. Обработку ведут со скоростями резания до 20 м/с. Поверхности, обработанные алмазами, имеют низкую шероховатость и малое отклонение размеров, так как алмазы имеют высокую размерную стойкость.

3.4. ДЕТАЛИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

В машинах много видов деталей вращательного движения: зубчатые колеса, шкивы ременных передач, барабаны, звездочки цепных передач, маховики, шпиндели станков, колеса автомобилей и гидротурбин. Все эти вращающиеся детали устанавливают на валах или осях.

Осью называется деталь, предназначенная только для поддержания вращающихся деталей; оси не передают крутящего момента. Чаще всего оси изготавливаются прямыми и могут быть двух типов: невращающимися и подвижными, т.е. вращающимися вместе с установленными на них деталями. На расчетных схемах оси представляют балками, нагруженными изгибающими моментами, т.е. при расчетах не учитывают крутящий момент и силы трения.

Валы, в отличие от осей, не только поддерживают вращающиеся детали машин, но и передают крутящие моменты, поэтому их рассчитывают на совместное действие кручения и изгиба. Если значения крутящих моментов на валу значительно больше значений изгибающих моментов, то валы считаются легко нагруженными и их рассчитывают на кручение, пренебрегая изгибом.

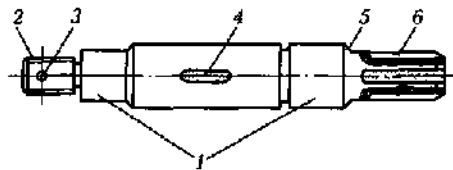


Рис. 3.4

По форме геометрической оси валы разделяют на **прямые** и **коленчатые**. Коленчатые валы применяют для преобразования в машине возвратно-поступательного движения во вращательное, и наоборот. Такие валы выполняют не только функции валов, но и функции кривошипов в кривошипно-шатунных механизмах. Особую группу составляют **гибкие** валы, положение геометрической оси которых может изменяться в пространстве.

Чаще всего оси и валы имеют две опоры, но существуют и многоопорные трансмиссионные валы, отдельные части которых соединяются муфтами. Более подробно о муфтах см. подразд. 3.11.

Опорные части валов и осей называют **цапфами 1** (рис. 3.4), причем промежуточные цапфы называют **шейками**, а концевые — **шпилами**. Цапфы передают на опоры радиальную нагрузку; длина цапфы под подшипники качения меньше, чем под подшипники скольжения. Для соединения вала или оси с другими деталями на поверхностях делают шпоночные пазы 4, отверстия 3; нарезают резьбу 2 и шлицы 6. Резкие изменения сечений вала снижают его усталостную прочность. Поэтому переход от одного сечения к другому должен выполняться плавно, в виде галтелей 5.

При вертикальном расположении вала осевые силы вала давят на подшипник. В больших гидроагрегатах (типа Волжской ГЭС) подшипники испытывают осевую нагрузку, достигающую 34 МН.

3.5. КОРПУСНЫЕ ДЕТАЛИ

Корпусные детали имеют разное назначение. Они служат для размещения механизмов машин, являются их опорой и базой для взаимного расположения основных узлов и, наконец, образуют контур машины или отдельных ее узлов.

Корпусные детали в значительной степени определяют работоспособность и надежность машин по критериям точности работы под нагрузкой, виброустойчивости, долговечности. В стационар-

ных машинах корпусные детали составляют 70...85 % от всей массы машины. Поэтому вопрос снижения массы корпусных деталей всегда является актуальным, особенно для тяжелых станков.

На рис. 3.5 показан тяжелый двухстоечный продольно-строгальный станок. Станина 1, стойка 2, поперечина 3, перекладина 4 и стол 5 — это все корпусные детали. К корпусным деталям относятся также корпуса коробов скоростей автомобилей, плиты, рамы, основания, корпуса коробов передач, фундаментные плиты.

Базовой деталью стационарной машины является **станина**. На станине закрепляются все узлы, при этом должна обеспечиваться точность их взаимного расположения. У металлорежущего станка (см. рис. 3.5) на станине имеются направляющие 6, по которым перемещаются узлы, несущие режущий инструмент или заготовку. Станина является одной из наиболее ответственных деталей станка, которая определяет многие его эксплуатационные качества. К конструкции станины предъявляются следующие требования: она должна иметь высокую жесткость и виброустойчивость, длительное время сохранять точность, иметь технологичную конструкцию и минимальную массу, удобное взаимное расположение отдельных узлов, обеспечивать удобный отвод стружки, иметь резервуары для смазки и охлаждающей жидкости, а также ниши для электрооборудования.

Для корпусных деталей **критериями работоспособности и надежности** являются прочность, жесткость и долговечность.

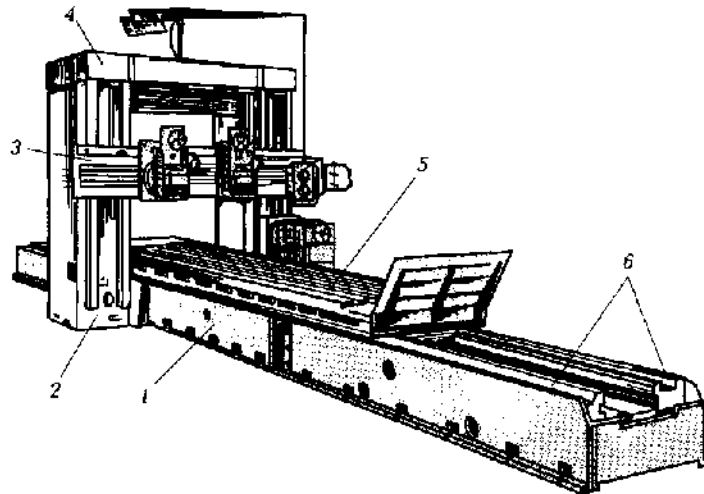


Рис. 3.5

Прочность является основным критерием работоспособности для корпусных деталей, подверженных большим нагрузкам, главным образом ударным и переменным.

Жесткость служит основным критерием работоспособности большинства корпусных деталей. Повышенные упругие перемещения в корпусных деталях приводят к неправильной работе механизмов, снижению точности работы машины, способствуют возникновению колебаний.

Долговечность по износу имеет огромное значение для корпусных деталей, имеющих плоские или цилиндрические поверхности скольжения, выполненные как единое целое с корпусом (без прокладок и втулок).

Материалы корпусных деталей

Корпусные детали должны иметь большую жесткость, поэтому их изготавливают из материалов с высоким модулем упругости (из чугуна и сталей без термической обработки, поскольку ее трудно осуществить для корпусных деталей).

Корпусные детали в транспортных машинах, например картеры двигателей, а также подвижные детали стационарных машин, например поршни, нагружаемые большими инерционными массами, чаще всего выполняют из легких сплавов, обладающих повышенной удельной прочностью. Большинство корпусных деталей отливают из чугуна, что позволяет получать изделия сложной геометрической формы.

Сварные конструкции позволяют уменьшить массу и габаритные размеры, а в единичном и мелкосерийном производстве сварные корпусные детали к тому же дешевле, чем литые.

В тяжелом машиностроении применяют сварно-литые конструкции, так как они значительно упрощают изготовление крупных отливок (например, станины продольно-строгальных станков, у которых длина направляющих достигает двадцати метров).

Для изготовления крупных корпусных деталей в последнее время стали применять бетонные и железобетонные конструкции. Бетон хорошо гасит вибрации, что увеличивает жесткость машины в целом. Кроме того, по сравнению с чугуном бетон менее чувствителен к колебаниям температуры. Хотя модуль упругости бетона меньше, чем модуль упругости чугуна, такую же жесткость детали можно получить путем увеличения толщины ее стенок. Масса корпусной детали при этом остается в заданных пределах, так как бетон втрое легче серого чугуна.

Однако бетон имеет недостаток: после схватывания он поглощает влагу, что влечет за собой изменение объема. Кроме того, попадание масла на бетон повреждает его, поэтому следует защищать бетон от влаги и попадания масла.

Для изготовления станин тяжелых станков используют железобетон, что позволяет сэкономить металл на 40...60 % при обеспечении такой же жесткости, как и при применении чугуна.

Перспективным материалом является полимерный бетон, который имеет высокий модуль упругости ($E = 40 \text{ кН/мм}^2$) и лишен недостатков, присущих бетону.

Корпусные детали минимальной массы, которые не испытывают больших нагрузок и от которых не требуется стабильности размеров, изготавливают из пластмасс. К таким деталям относятся корпуса приборов, переносных машин и инструментов, крышки, кожухи и т.д.

3.6. ПРУЖИНЫ И РЕССОРЫ

Пружины и рессоры — это упругие элементы. Область их применения очень широка:

- создание заданных постоянных сил — начального сжатия или натяжения — в передачах трением, фрикционных муфтах, тормозах, предохранительных устройствах, подшипниках качения;
- силовое замыкание механизмов для исключения влияния зазоров на точность перемещений;
- выполнение функций двигателя на основе предварительного закручивания пружины, например в часовых механизмах;
- виброизоляция в транспортных машинах — автомобилях, железнодорожных вагонах, приборах, виброизоляционных опорах машин;

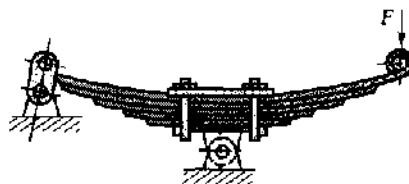


Рис. 3.6

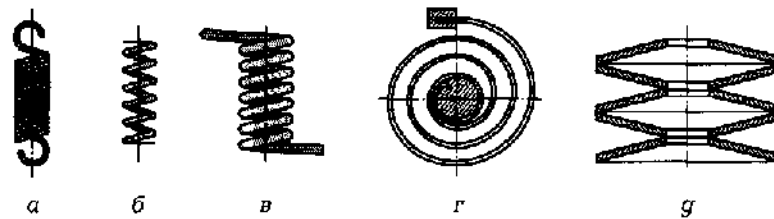


Рис. 3.7

- гашение энергии удара, например с помощью буферных пружин, применяемых в артиллерийских орудиях. Благодаря упругим элементам на больших перемещениях энергия удара гасится и сила удара уменьшается. В отличие от первых трех случаев, буферные и виброизоляционные пружины аккумулируют вредную для работы машины энергию;
- измерение сил в измерительных приборах через упругое перемещение витков пружины.

Рессоры (рис. 3.6) изготавливают из листового материала; для увеличения гибкости их собирают из листов разной длины, что приближает их к телам равного сопротивления поперечному изгибу. Трение между листами обеспечивает демпфирование колебаний. Листовые рессоры применяют в основном для виброизоляции (упругие подвески автомобилей, железнодорожных вагонов) и восприятия удара (в кузнечно-прессовом оборудовании). Для обеспечения плотного контакта между листами и некоторой разгрузки длинных листов (поломка которых более опасна, чем коротких) короткие листы выполняют с большей кривизной. Рессоры изготавливают из кремнистых, кремненикелевых и хромомарганцовистых сталей.

При упрощенном расчете на изгиб рессоры рассматривают как консольную балку, имеющую треугольную форму в плане, разрезанную на полосы и собранную в пакет. Допускаемые напряжения выбирают в пределах $40 \dots 60 \text{ МН/см}^2$.

Пружины — наиболее универсальные упругие элементы; они применяются во всех шести случаях, перечисленных ранее. Пружины могут работать на растяжение (рис. 3.7, а), сжатие (рис. 3.7, б), кручение (рис. 3.7, в) и не воспринимают поперечный изгиб. В этом случае их заменяют рессорами.

По форме пружины очень разнообразны: цилиндрические (см. рис. 3.7, а — в), плоские спиральные (рис. 3.7, г), тарельчатые (рис. 3.7, г), фигурные и др.

Материалы для изготовления пружин должны иметь высокие и стабильные упругие свойства. Поэтому основными материалами являются высокоуглеродистые стали 65, 70, марганцовистая сталь 65Г, кремнистые стали 60С2А, хромованадиевая сталь 50ХФА и др.

3.7. НЕРАЗЪЕМНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ

К неразъемным относятся соединения, при которых разборка узла возможна лишь при разрушении крепления или самих деталей: это сварные, клепаные и клееные соединения; неподвижные соединения, полученные армированием пластмассовых деталей. Сюда можно отнести неподвижные соединения деталей по посадкам с натягом.

Сварные соединения

Сварные конструкции применяются в строительных сооружениях, станкостроении (крупные стальные станины) и других отраслях машиностроения. С каждым годом сварка находит все новые сферы применения: освоение океанских месторождений полезных ископаемых, строительство мощных атомных электростанций и т.д. **Сварка** — это процесс получения монолитного соединения материалов за счет термодинамически необратимого превращения тепловой и механической энергии и вещества в стыке. Кроме приведенного термодинамического определения сварки возможны и другие. Например, в технологическом аспекте согласно ГОСТ 2601 — 84* «Сварка металлов. Термины и определения основных понятий» сварка — это процесс получения неразъемных соединений посредством установления межатомных связей между свариваемыми частями при их местном нагреве или пластическом деформировании, или совместном действии того и другого.

При классификации процессов сварки в соответствии с ГОСТ 19521 — 74 «Сварка металлов. Классификация» выделяют три основных физических признака: форму вводимой энергии, наличие давления и вид инструмента — носителя энергии. По виду вводимой в изделие энергии все основные сварочные процессы, включая сварку и пайку, разделены на термические, термомеханические (или, точнее, термопрессовые) и механические (точнее — прессово-механические).

К **термическим** видам сварки относят ручную дуговую (плавящимся и неплавящимся электродом), автоматическую дуговую под флюсом, электрошлаковую, дуговую в защитных газах, плазменную, электронно-лучевую, лазерную, газовую и сварку в вакууме полым катодом. К **термомеханическим** методам сварки, которые являются наиболее распространенными видами, относят контактную (точечную, шовную и стыковую), конденсаторную, диффузионную и индукционно-прессовую (высокочастотную сварку). **Механические** методы сварки — это холодная сварка со значительной объемной пластической деформацией, сварка взрывом, ультразвуковая сварка, сварка трением и магнитоимпульсная.

Сварные соединения являются наиболее совершенными неразъемными соединениями. Сваркой можно изготавливать детали больших размеров. Прочность сварных соединений при статических и ударных нагрузках должна соответствовать прочности целого металла. В настоящее время освоена сварка всех конструкционных металлов, а также цветных сплавов и пластмасс.

Качество сварки зависит от чистоты подготовки и формы свариваемых поверхностей, квалификации сварщика и условий производства работ. Прочность сварных швов зависит от взаимного проникновения расплавленного металла и металла свариваемых деталей: возможен непровар либо перегрев металла свариваемых деталей. Оба дефекта приведут к снижению прочности шва.

Применение сварных соединений расширяется благодаря их преимуществам по сравнению с механическими соединениями: уменьшенная масса конструкции; герметичность соединения; удобство автоматизации процесса сварки и возможность соединения толстых профилей. Сварные стальные конструкции легче чугунных литых иногда до 50 %, а стальных литых — до 30 %. Кроме того, стоимость сварных конструкций из проката почти в два раза меньше, чем стоимость стального литья или поковок.

Недостатками сварки являются трудность контроля сварного шва; нестабильность качества шва, зависящая от квалификации сварщика, — этот недостаток устраняется применением автоматической сварки; сварной шов является сильным концентратором напряжений. К недостаткам сварных соединений можно также отнести сложность, а иногда невозможность сварки разнородных металлов, выделение большого количества теплоты и вследствие этого создание значительных внутренних напряжений, вызывающих коробление сварной конструкции, недостаточную прочность соединения при вибрационных и динамических нагрузках.



Рис. 3.8

При проектировании сварных соединений необходимо выполнять условие равнопрочности шва и соединяемых элементов.

По взаимному расположению соединяемых элементов сварные соединения можно разделить на следующие:

- стыковые соединения (рис. 3.8); швы таких соединений также называют стыковыми;
- тавровые соединения — соединяемые элементы перпендикулярны один другому, при этом один элемент приваривается торцом к боковой поверхности другого (рис. 3.9, а). Угол между полкой и стенкой может быть прямым, а может и отличаться от 90° . Сочетание толщин деталей может быть различным. Швы таких соединений называют угловыми;
- угловые соединения — соединяемые элементы расположены под углом друг к другу, привариваются по кромкам (рис. 3.9, б);
- нахлесточные соединения — поверхности соединяемых элементов частично перекрывают друг друга. Нахлесточные соединения выполняют с угловыми (рис. 3.9, в) и пробочными (рис. 3.9, г) швами.

Стыковой шов имеет несколько разновидностей, зависящих от толщины соединяемых элементов δ (табл. 3.1). Для элементов малой

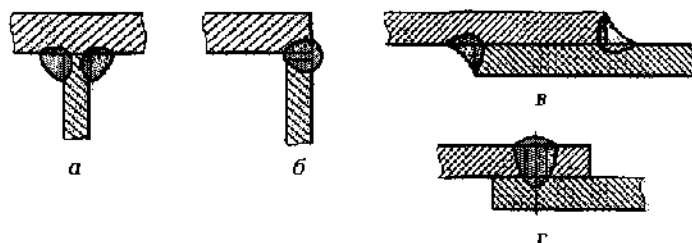


Рис. 3.9

Таблица 3.1. Толщина элементов δ , мм, при соединении встык дуговой сварки

Вид сварки	Форма шва по рис. 3.8			
	эскиз а	эскиз б	эскиз в	эскиз г
Ручная	0,5...1	3...6	6...15	12...25
Автоматическая под флюсом	1,5...3,0	2...20	14...24	20...60

толщины применяют одностороннюю сварку с отбортовкой (см. рис. 3.8, а); для элементов средней толщины — одностороннюю (для толщины 1...3 мм) и двустороннюю сварку: без скоса кромок (см. рис. 3.8, б) и со скосами кромок (см. рис. 3.8, в); для элементов большой толщины — с двумя скосами двух кромок (см. рис. 3.8, г).

Стыковые швы при высоте наплавляемого металла h могут выполняться нормальными ($h = \delta$), усиленными ($h = 1,2\delta$) или облегченными ($h < \delta$).

Стыковые швы рассчитывают на прочность по номинальному сечению соединяемых элементов (без учета утолщения швов). Напряжение растяжения (сжатия) σ определяется по формуле

$$\sigma_{\text{р(сж)}} = \frac{F}{l\delta} \leq [\sigma']_{\text{р(сж)}},$$

где l — расчетная длина шва, мм, равная длине шва за вычетом 10 мм на непровар. Допускаемые напряжения $[\sigma']$ в сварных швах выбираются по табл. 3.2. Допускаемая растягивающая (или сжимающая) сила

$$[F] = [\sigma']_{\text{р(сж)}} l \delta.$$

Пример 3.1

Две полосы из стали Ст3 ($[\sigma]_p = 160 \text{ Н/мм}^2$) сварены встык и нагружены растягивающей силой F (рис. 3.10). Определить допускаемую силу, если осуществляется ручная сварка электродами Э42.

Решение.

1. По табл. 3.2 выбираем $[\sigma']_p = 0,8[\sigma]_p = 0,8 \cdot 160 = 128 \text{ Н/мм}^2$.
2. Определяем расчетную длину шва $l = 180 - 10 = 170 \text{ мм}$.
3. Определяем допускаемую растягивающую силу $[F] = 128 \cdot 170 \cdot 8 = 174,08 \text{ кН}$.

Если в плоскости соединяемых элементов действуют изгибающий момент M и растягивающая (сжимающая) сила, то напряжения определяют так:

Таблица 3.2. Допускаемые напряжения в сварных швах при статической нагрузке

Способ сварки и тип электрода	Стыковые швы		Угловые (валиковые) швы при срезе $[\tau]_{ср}$
	при растяжении $[\sigma']_p$	при сжатии $[\sigma']_{сж}$	
Контактный точечный	—	—	$0,50[\sigma]_p$
Ручной электродами Э34	$0,60[\sigma]_p$	$0,75[\sigma]_p$	$0,50[\sigma]_p$
Ручной электродами Э42	$0,80[\sigma]_p$	$0,90[\sigma]_p$	$0,60[\sigma]_p$
Автоматический под слоем флюса, контактный стыковой с оплавлением, ручной электродами Э42А и Э50А в среде защитного газа	$0,90[\sigma]_p$	$[\sigma]_p$	$0,65[\sigma]_p$

Примечание. $[\sigma]_p$ — допускаемое напряжение для основного металла конструкции при растяжении; $[\sigma']_p$, $[\sigma']_{сж}$, $[\tau]_{ср}$ — допускаемые напряжения соответственно при растяжении и сжатии для стыкового шва и срезе для углового шва.

$$\sigma = \frac{M}{W_c} \pm \frac{F}{l\delta} \leq [\sigma']_p,$$

где W_c — момент сопротивления расчетного сечения шва.

Нахлесточные соединения по расположению угловых швов к направлению силы подразделяют на лобовые, расположенные перпендикулярно (рис. 3.11, а); фланговые, расположенные параллельно (рис. 3.11, б); косые, расположенные под углом (рис. 3.11, в), и комбинированные. Длину угловых швов выбирают не менее 30 мм из-за неизбежных дефектов по концам швов. Лобовые швы накладывают с двух сторон, величина перекрытия должна быть не менее

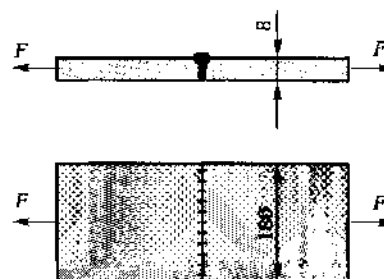


Рис. 3.10

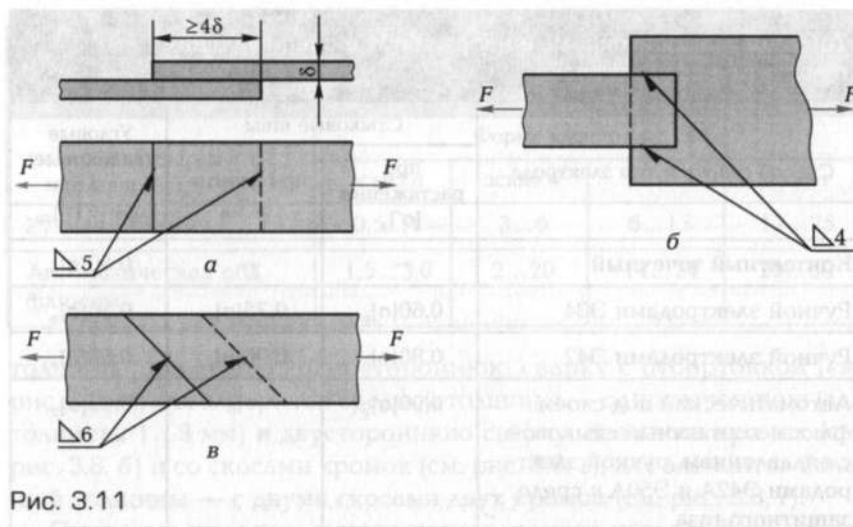


Рис. 3.11

4δ. Максимальную длину лобовых и косых швов не ограничивают. Длину фланговых швов рекомендуют выбирать не более $(50 \dots 60)k$, где k — катет треугольника поперечного сечения шва. Размер k , как правило, равен толщине листов δ . Расчет всех угловых швов производится по единым формулам:

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{F}{0,7kl} \leq [\tau']_{\text{ср}}; [F] \leq 0,7kl[\tau']_{\text{ср}}.$$

Пример 3.2

Растянутый раскос фермы состоит из двух равнополочных уголков размерами $75 \times 75 \times 6$ мм, приваренных к косынке лобовыми и фланговыми швами с катетом $k = 5$ мм. Материал угольников — Ст3; $[\sigma]_p = 160 \text{ Н/мм}^2$; сварка ручная электродами Э42А.

Определить длины фланговых швов $l_{\phi 1}$ и $l_{\phi 2}$ из условия равнопрочности раскоса и его соединения с косынкой (рис. 3.12).

Решение.

1. Определяем допускаемую величину растягивающей силы $[F] = [\sigma]_p S_{\text{min}} = 2S_{\text{yr}}[\sigma]_p = 2 \cdot 8,78 \cdot 10^2 \cdot 160 = 281 \cdot 10^3 \text{ Н}$.

Площадь поперечного сечения уголков берется по справочникам, в данном случае (см. Приложение I) она равна $8,78 \text{ см}^2$.

2. Определяем допускаемое усилие $[F_A]$ для лобового шва. Прежде всего определяем $[\tau']_{\text{ср}} = 0,65[\sigma]_p = 0,65 \cdot 160 = 104 \text{ Н/мм}^2$ (см. табл. 3.2).

Затем вычисляем $[F_A] = 2 \cdot 0,7kl_A[\tau']_{\text{ср}} = 2 \cdot 0,7 \cdot 5 \cdot 75 \cdot 104 = 54,6 \cdot 10^3 \text{ Н}$.

3. Определяем усилие F_{ϕ} , которое должно быть воспринято фланговыми швами:

$$F_{\phi} = [F] - [F_A] = 281 \cdot 10^3 - 54,6 \cdot 10^3 = 226,4 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

4. Вычисляем суммарную длину фланговых швов:

$$l_{\phi} = 2(l_{\phi 1} + l_{\phi 2}) = \frac{F_{\phi}}{0,7k[\tau']_{\text{ср}}} = \frac{226,4 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 5 \cdot 104} = 622,5 \text{ мм.}$$

Принимаем суммарную длину $l_{\phi} = 630$ мм, следовательно, для одного уголка $l_{\phi 1} + l_{\phi 2} = 630/2 = 315$ мм.

5. Определяем размеры $l_{\phi 1}$ и $l_{\phi 2}$. Заметим, что центр тяжести уголков находится на расстоянии 20,6 мм. Поэтому фланговый шов $l_{\phi 1}$ должен быть больше, чем $l_{\phi 2}$. Отсюда

$$l_{\phi 1} = \frac{l_{\phi 1} + l_{\phi 2}}{75} (75 - 20,6) = \frac{315}{75} (75 - 20,6) = 228 \text{ мм.}$$

Таким образом, $l_{\phi 2} = 315 - 228 = 87$ мм.

Независимо от способа сварки в соответствии с ГОСТ 2.312—72* «Условное изображение и обозначение швов сварных соединений» видимый шов изображают сплошной линией, а невидимый — пунктиром; от изображения шва проводят линию-выноску, заканчивающуюся односторонней стрелкой (см. рис. 3.11). При точечной контактной сварке видимую одиночную сварную точку изображают знаком «+», невидимые одиночные точки на чертеже не изображают. Размер катета шва указывается знаком ∇ , а стоящая справа цифра означает высоту катета в миллиметрах (см. рис. 3.11).

Паяные соединения являются разновидностью сварных. **Пайкой** называют образование соединения с межатомными связями в результате нагрева соединяемых материалов ниже температуры их плавления, смачивания припоем, затекания припоя в зазор и пос-

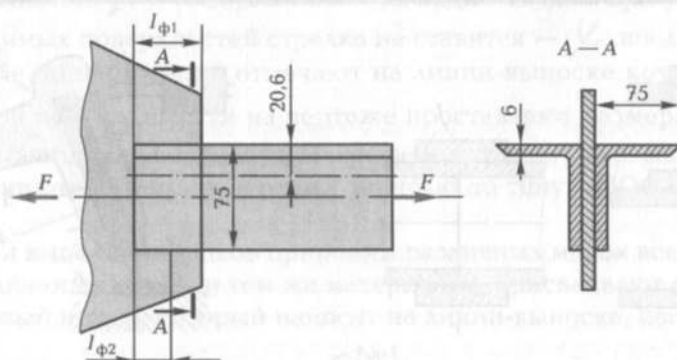


Рис. 3.12

ледующей его кристаллизации. Пайкой можно соединять детали из разнородных металлов, а также из металлов и стекла, керамики, графита и других неметаллических материалов. Свойство материала образовывать паяное соединение при заданном режиме пайки называется паяемостью.

В качестве припоя используется металл или сплав (на основе олова, меди, серебра) с температурой плавления ниже температуры плавления паяемых материалов.

Припои в зависимости от температуры плавления делят на мягкие (оловянисто-свинцовые с температурой плавления ниже 400°C) и твердые (медные, медно-цинковые с температурой плавления $400 \dots 1200^{\circ}\text{C}$). Мягкие припои имеют предел прочности $\sigma_{в.р}$ до 100 МПа, твердые — 500 МПа и выше. Вид припоя выбирают с учетом условий работы машины, материала деталей и оговаривают в технических условиях на сборку узла.

Для удаления оксидов с поверхности паяемого материала и припоя и предотвращения их образования в процессе пайки применяется вспомогательный материал, называемый **паяльным флюсом**. В качестве флюсов для твердых припоев применяют буру, плавиковый шпат и их смеси с солями щелочных металлов, для мягких — канифоль, хлорид цинка и фосфорную кислоту. Пайку точных соединений проводят без флюсов в среде защитных газов или вакууме.

Для повышения прочности соединения необходимо обеспечить большую поверхность прилегания сопрягаемых поверхностей, поэтому используют нахлесточные соединения без применения накладок (рис. 3.13, а) и с применением (рис. 3.13, б); стыковое соединение вскос (рис. 3.13, в), а также вводят дополнительные детали *1* (рис. 3.13, г).

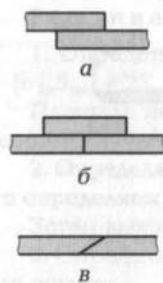


Рис. 3.13

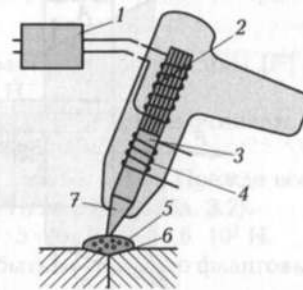


Рис. 3.14

Припой закладывают в место спая в виде фольговых прокладок, проволок, лент, дробы, паст вместе с флюсом, а также в расплавленном виде. При автоматизированной пайке припой в виде пасты вносят дозированно шприц-установками.

В зависимости от способа нагрева пайку подразделяют на газовую, погружением в ванну с солевым раствором, электрическую (дуговую, индукционную, контактную), ультразвуковую.

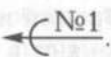
В единичном и мелкосерийном производстве местный нагрев производят паяльником или газовой горелкой. В серийном и массовом производстве широко применяют нагрев в ваннах, газовых печах, электронагрев и индукционный нагрев токами высокой частоты (ТВЧ). При нагреве ТВЧ индуктор имеет форму, близкую к соединяемым деталям, поэтому детали разогревают в месте спая (это предохраняет их от окисления и коробления).

Пайка — трудоемкий процесс, поэтому на операциях пайки желательно предусматривать различные средства механизации. В массовом и серийном производстве применяют полуавтоматы и автоматы для газовой, электрической и других видов пайки.

Перспективным направлением является применение ультразвука при пайке металлов и неметаллических материалов. Оборудование (рис. 3.14) состоит из генератора 1 ультразвуковой частоты и электропаяльника с ультразвуковым преобразователем 2 с ферромагнитным стержнем 3. Частота колебаний наконечника 7 приблизительно 20 кГц (поз. 4 — электрическая обмотка). Данный способ удобен для пайки деталей из алюминия, так как высокочастотные колебания в расплавленном припое 5 разрушают оксидную пленку 6 металла, что позволяет вести пайку без применения флюса.

Знак условного обозначения пайки на чертежах наносят на линии-выноски:  — так указывают на видимый шов; при указании невидимых поверхностей стрелка не ставится — ; швы, выполненные по периметру, отмечают на линии-выноске кружком — ; при необходимости на чертеже проставляют размеры шва и шероховатость поверхности; обозначение припоя указывают в технических требованиях чертежа записью по типу: «ПОС 40 ГОСТ ...».

При выполнении швов припоями различных марок всем швам, выполняемым одним и тем же материалом, присваивают один порядковый номер, который наносят на линии-выноске, например:



Пайкой можно изготавливать сложные по конфигурации узлы и целые конструкции, состоящие из нескольких деталей, за один производственный цикл (нагрев), что позволяет рассматривать ее (в отличие от сварки) как групповой метод соединения материалов. Пайка — высокопроизводительный технологический процесс, легко поддающийся механизации и автоматизации.

Пайка уменьшает, а иногда полностью исключает остаточные напряжения и деформации. К числу очень важных достоинств пайки следует отнести возможность соединения разнородных металлов и соединение металлов с неметаллами. С помощью пайки можно получать неразъемные и разъемные соединения. Последнее очень важно в производстве радиоэлектронной аппаратуры, когда возникает необходимость демонтажа при настройке или замене дефектных приборов, установленных на печатной плате.

Возможность варьировать размеры соединяемых пайкой поверхностей (величины нахлестки) позволяет обеспечить равнопрочные с основным металлом соединения. При этом получается более благоприятная форма соединения с меньшей концентрацией напряжений, чем при контактной сварке.

К достоинствам паяных конструкций можно отнести сохранение структуры и свойств металлов соединяемых деталей. Перечисленные ранее достоинства пайки позволяют рассматривать ее как прогрессивный технологический процесс, находящий все более широкое применение в производстве.

Недостатками пайки по сравнению со сваркой являются ограниченная механическая прочность соединения, значительная стоимость припоев, вредные испарения флюсов и припоев.

Клепанные соединения

Неразъемные соединения, получаемые за счет деформации заклепок или остаточной деформации конструктивных элементов деталей, называются **клепаными соединениями**. Такие соединения образуют постановкой заклепок в совмещенные отверстия соединяемых элементов и расклепкой с осаживанием стержня заклепки (рис. 3.15, а).

Клепкой получают соединения деталей из разнородных и трудносвариваемых материалов; термообработанных и окончательно обработанных точных деталей, для которых недопустим нагрев; деталей, подверженных вибрации и ударным нагрузкам. Часто клепанные соединения применяют в конструкциях, работающих

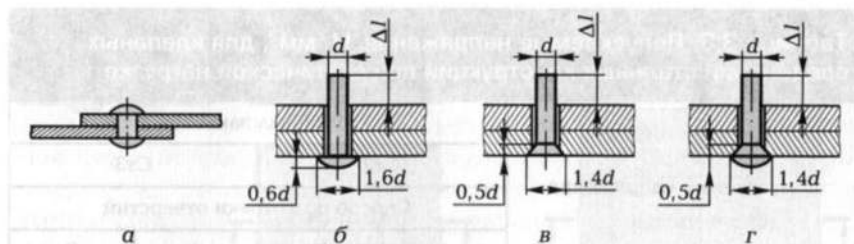


Рис. 3.15

при высоких и низких температурах, а также для получения прочных соединений, способных выдерживать большие нагрузки (например, в самолетостроении).

К недостаткам клепаных соединений можно отнести высокую трудоемкость их изготовления, ослабление деталей отверстиями под заклепки, концентрацию напряжений и нарушение гладкости поверхности. Процесс клепки производит большой шум, а вибрация клепального молотка при ручной сборке воздействует на руки рабочего и после нескольких лет работы вызывает профессиональные заболевания.

Заклепка представляет собой цилиндрический металлический стержень с головкой. В зависимости от типа головки различают заклепки с полукруглой (рис. 3.15, б), потайной (рис. 3.15, в) и полупотайной (рис. 3.15, г) головками. Заклепки с полукруглыми головками применяют в силовых и плотных силовых швах; заклепки с потайной головкой используют тогда, когда выступающие головки нежелательны; заклепки с полупотайной головкой применяют для соединения тонких (до 4 мм) стальных листов. Для соединения тонких листов и неметаллических деталей применяют пустотелые заклепки.

Размеры элементов заклепок приводятся в ГОСТ 10299—80*, ГОСТ 10300—80*, ГОСТ 10301—80 и др.

Обычно заклепки изготавливают из углеродистой стали марок Ст2 и Ст3. Допускаемые напряжения на срез и смятие приведены в табл. 3.3. Длину заклепки рассчитывают по формуле

$$l = l_1 + \Delta l = l_1 + (1,5 \dots 1,7)d,$$

где l_1 — суммарная толщина склепываемых деталей; Δl — запас длины на образование замыкающей головки; d — диаметр заклепки.

Отверстия для заклепок пробивают или просверливают по разметке. Можно одновременно сверлить обе склепываемые детали,

Таблица 3.3. Допускаемые напряжения, Н/мм², для клепаных соединений стальных конструкций при статической нагрузке

Допускаемые напряжения	Материал заклепок			
	Ст2		Ст3	
	Способ подготовки отверстий			
	I	II	I	II
На срез $[\tau]_{ср}$	140	100	140	100
На смятия $[\sigma]_{сж}$	280	240	320	280
На растяжение $[\sigma]_p$	140		160	

Примечание. Способы подготовки отверстий: I — отверстия просверлены или продавлены (на меньший диаметр) с последующей рассверловкой; II — отверстия продавлены.

это повышает точность соединения. Сверление отверстий является более трудоемкой и дорогой операцией, чем пробивка. Широкое распространение получил комбинированный способ обработки материала под заклепки: вначале пробивают отверстия меньшего диаметра, а затем рассверливают их до нужного размера. Рекомендуемые диаметры отверстий под заклепки приведены в табл. 3.4.

Сборка соединения осуществляется следующим образом. В готовые отверстия ставят заклепки. Затем под нижнюю (закладную) головку подставляют поддержку с углублением, соответствующим очертанию головки. Поддержка должна опираться на массивную наковальню, после чего осуществляется клепка (вручную или механически).

Таблица 3.4. Рекомендуемые диаметры отверстий под заклепку при точной и грубой сборках, мм

Номинальный диаметр заклепки	Сборка		Номинальный диаметр заклепки	Сборка	
	точная	грубая		точная	грубая
10	10,5	11,0	19	21	21
11,5	12,5	12,5	22	23	24
13	13,5	14,0	25	26	27
16	16,5	17,0	28	29	30

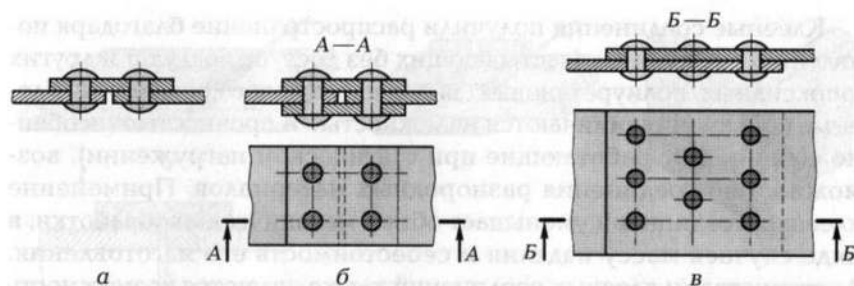


Рис. 3.16

В зависимости от условий работы принята следующая классификация клепаных швов:

- прочные — обеспечивают расчетную прочность соединения (фермы, балки, колонны);
- прочноплотные — обеспечивают не только расчетную прочность, но и герметичность соединения (паровые котлы, резервуары под давлением);
- плотные — обеспечивают герметичность соединений (резервуары и трубопроводы с небольшим избыточным давлением).

Заклепочные швы могут выполняться внахлестку (см. рис. 3.15, а), с одной (рис. 3.16, а) или двумя (рис. 3.16, б) накладками; при этом схемы клепаных соединений могут выполняться с рядным расположением заклепок (см. рис. 3.16, б) или с шахматным (рис. 3.16, в). Примеры расчета заклепок были рассмотрены в главе 2 (примеры 2.3, 2.4).

Клеевые соединения

Клеевые соединения — это неразъемные соединения неметаллическим веществом посредством поверхностного схватывания и молекулярной связи в клеящем слое; соединение получается путем нанесения клеев (адгезидов) на сопрягаемые поверхности. Прочность соединения обеспечивают адгезионными (между поверхностью деталей и клеящим слоем) и когезионными (внутри самого клея) силами. Неразъемное соединение деталей из различных материалов осуществляют клеями на основе синтетических смол. На практике применяют клеи БФ, ВК-1, ВК-2, МПФ-1 и др.

Клееные соединения получили распространение благодаря появлению анаэробных (застывающих без доступа воздуха) и других (эпоксидных, полиуретановых) видов клеев нового поколения. Клееные соединения отличаются надежностью и прочностью (особенно соединения, работающие при статическом нагружении), возможностью соединения разнородных материалов. Применение клеевых соединений уменьшает объем механической обработки, в ряде случаев массу изделия и себестоимость его изготовления. Достоинствами клеевых соединений также являются возможность соединения деталей из разнородных, а также тонколистовых материалов; высокое сопротивление усталости; возможность обеспечения герметичности; стойкость против коррозии; малая концентрация напряжений; малая масса. В последние годы склеивание нашло широкое применение даже в ответственных деталях машин и сооружениях, например самолетах, мостах, металлорежущих станках (для повышения износостойкости на направляющие приклеивают фторопласт).

К недостаткам клеевых соединений относят невысокую прочность на отрыв (отдир, расслаивание), «старение» некоторых клеев с течением времени, меньшую долговечность по сравнению со сварными и клепаными соединениями, длительный срок полимеризации у некоторых клеев и незначительную тепловую стойкость.

В конструкциях изделий клеевые соединения применяют как самостоятельные либо в комбинации с другими видами: клеесварные, клеепрессовые, клеерезьбовые, клеепаяные, клеевинтовые. Применение клеев в сочетании с традиционными способами выполнения соединений позволяет конструкции работать при произвольной нагрузке, включая вибрационную; повысить прочность соединений в 1,5—3 раза; сократить число сварных швов или точек; заменить тугую резьбу на обычную (испытания на срез показывают, что прочность клеерезьбовых соединений более чем в два раза выше прочности простых клеевых соединений). Клееные соединения заменяют соединения с натягом (и не уступают им по прочности), шлицевые, шпоночные; при этом существенно снижаются число деталей и требования к качеству сопрягаемых поверхностей, что сокращает объем механической обработки.

Успешно применяют клей для повышения прочности сопряжений зубчатых колес с валом; при установке наружных колец подшипников в корпус, в частности после потери размеров расточек; для уплотнения и стопорения резьбовых соединений.

Швы неразъемных соединений, полученных склеиванием, отмечают на чертеже знаком Δ , проставленным на линии-выноске:

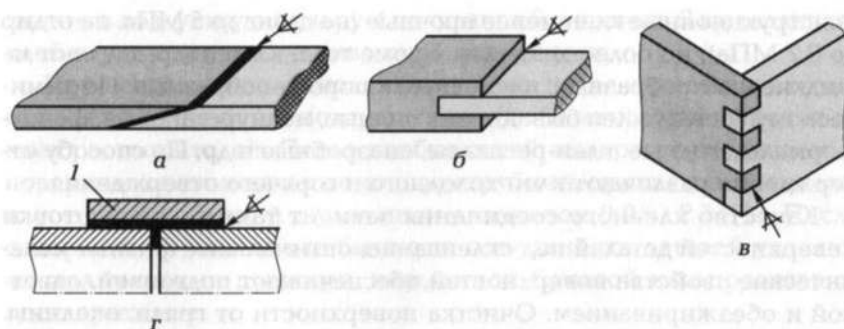


Рис. 3.17

✂; место клееного соединения изображают сплошной линией, которая должна быть в два раза толще основной (рис. 3.17, а, г). В технических требованиях чертежа необходимо указать, каким клеем осуществлено неразъемное соединение, например «Клей БФ-2 ГОСТ ...».

Прочность клееных соединений зависит от материала деталей, шероховатости сопрягаемых поверхностей, марки клея, толщины и площади клеевого слоя, равномерности его распределения по сечению сопрягаемых поверхностей, способа их очистки перед склеиванием. Оптимальная толщина клеевого слоя должна быть 0,05... 0,15 мм. При большей толщине в клеевом слое в процессе отверждения могут появиться трещины. Рациональные параметры шероховатости сопрягаемых поверхностей $Ra\ 2,5...3,2$ мкм и более. Требуемую площадь склеиваемых поверхностей определяют исходя из допустимых напряжений для рассматриваемого вида нагружения деталей (сдвиг, равномерный отрыв, изгиб и т.п.) и при необходимости увеличивают, создавая косые стыки (см. рис. 3.17, а), соединения в замок (рис. 3.17, б), в переплет (рис. 3.17, в), используя дополнительные детали 1 (см. рис. 3.17, г). Марку клея выбирают в зависимости от материала соединяемых деталей и условий эксплуатации соединения: нагрузки, температуры, агрессивности среды и пр. Клеи должны обеспечивать надежное молекулярное сцепление (адгезию) с поверхностями склеиваемых деталей, термостойкость, стойкость к воздействию кислот, щелочей, масла, бензина, воды. Клеи должны сохранять склеивающую способность в течение не менее 2 ч после их приготовления.

Клеи подразделяют на конструкционные (жесткие) и неконструкционные (эластичные). Конструкционные клеи обеспечивают высокую прочность (на сдвиг до 50... 55 МПа, на отрыв 2,5... 2,7 МПа). Не-

конструкционные клеи менее прочные (на сдвиг до 5 МПа, на отди-
р до 0,7 МПа), но более дешевые. Кроме того, клеи подразделяют на
жидкие, пастообразные, пленочные и порошкообразные. По хими-
ческому составу клеи бывают эпоксидные, полиуретановые, фенол-
формальдегидные, клее-расплавы, анаэробные и др. По способу от-
верждения различают клеи холодного и горячего отверждения.

Качество клееного соединения зависит также от подготовки
поверхностей деталей под склеивание; оптимальные физико-меха-
нические свойства поверхностей обеспечивают подгонкой, очист-
кой и обезжириванием. Очистка поверхности от грязи, окалина,
масла, жира способствует ее лучшей смачиваемости клеем и повы-
шению сцепления клея с материалом. Детали из низкоуглеродис-
той стали очищают в 25%-ном растворе фосфорной кислоты или
10%-ном растворе метилсиликата, нагретых до 60 °С; детали из кор-
розионно-стойкой стали — в растворе щелочи, алюминиевые — в
растворе серной кислоты, медные и латунные — в азотной кисло-
те. Затем проводят тщательную промывку деталей в чистой горя-
чей воде, сушку и обезжиривание бензином или ацетоном.

Клеи готовят (смешивают необходимые компоненты) в специ-
альных помещениях, соблюдая правила безопасности труда. Гото-
вый клей выдается на сборочный участок в специальных, хорошо
закрытых сосудах, изготовленных из коррозионно-стойкой стали.

На подготовленную поверхность клеем наносят кистью, поливом,
шпателем, роликом, окутанием, распылением из пульверизатора,
шприцем, дозатором. На рис. 3.18 приведена схема пневматическо-
го шприца для шовной накладки клея. Клей 2 помещают в насадку
1 шприца. При нажатии курка 5 под давлением воздуха, поступа-

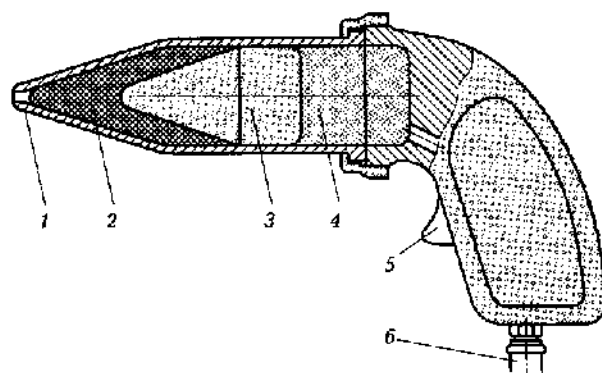


Рис. 3.18

ющего в воздушную камеру 4 из шланга 6, поршень 3 выдавливает клей через сопло на склеиваемую поверхность.

При использовании эпоксидных клеев после нанесения клеевого слоя выполняют его подсушивание (до 60 мин) для испарения из клея растворителей. После необходимой выдержки склеиваемые поверхности сжимают с помощью струбцин, прихватов, специальных приспособлений с удельным давлением 0,05...2 МПа. После отверждения клея его избыток на поверхности деталей удаляют металлическими щетками, наждачной бумагой или промывают растворителем.

На сборочных линиях эффективно применение клеев-расплавов, имеющих короткое время схватывания (5...10 с), при этом клей, предварительно расплавленный при температуре 100...160 °С, затвердевает при температуре 20 °С. К достоинствам клеев-расплавов относят их невысокую стоимость, отсутствие пожароопасных и загрязняющих окружающую среду растворов, возможность сразу подвергать склеенные детали очистке и механической обработке. Клеи-расплавы обычно наносят пистолетом, в который подается клей, предварительно расплавленный в термостате до 190...320 °С.

Применение анаэробных клеев, имеющих небольшое время полимеризации (время схватывания от 1,5...2 до 10...15 мин в зависимости от марки), позволяет автоматизировать сборочный процесс. Клеи наносят специальными дозаторами, которые при установке в манипуляторе робота позволяют получить клеевой слой различной конфигурации.

Соединения с натягом

В машиностроении для создания неподвижного соединения, например для деталей вал—шестерня, можно использовать *посадки с натягом*, который образуют разностью посадочных размеров сопрягаемых деталей.

Наибольшее распространение получили цилиндрические соединения, в которых одна деталь охватывает другую по цилиндрической поверхности. Выбор посадки производится из условия, что при наименьшем натяге обеспечивается прочность соединения и передача нагрузки, а при наибольшем — прочность деталей. Соединения с натягом (установка шарикоподшипников на валы, поршневых колец на поршень и т. п.) широко распространены в машиностроении — 10...17 % общего числа соединений.

Гарантированный натяг не зависит от способа соединения деталей (под прессом, разогреванием охватывающей детали, охлаждением охватываемой детали или комбинированным способом).

Сопряжение деталей под прессом — наиболее известный и несложный процесс. Его недостатком является неравномерная деформация тонкостенных деталей и возможность повреждения торцов.

Способ сопряжения путем нагрева охватывающей детали до 200...400 °С и запрессовки в нее холодной охватываемой детали также широко распространен. Недостатки этого способа — возможность изменения структуры металла, появление окалины и коробление.

Хорошим способом сопряжения деталей с натягом является **охлаждение охватываемой детали**.

Основными отклонениями, которые дают гарантированный натяг, являются Р, R, S, T, U, V, X, Y, Z, ZA, ZB, ZC (для отверстий) и р, r, s, t, u, v, x, y, z, za, zb, zc (для валов).

В зависимости от назначения соединений выбираются тяжелые, средние и легкие посадки с натягом.

Тяжелые посадки применяются в соединениях с большими нагрузками, например в вагонных колесах на осях, установочных штифтах в станочных приспособлениях, несъемных муфтах на концах валов прокатных станов, седле клапана в головке блока цилиндров грузового автомобиля (с отклонениями z, za, zb, zc).

Средние посадки рекомендуется применять для запрессовки втулок в шкивы и зубчатые колеса, соединения кондукторных втулок с корпусом кондуктора, закрепления зубчатых колес на валах коробок скоростей, установки бронзовых венцов червячных колес (с отклонениями v, x, y).

Легкие посадки с натягом применяют для соединения тонкостенных втулок с корпусами, закрепления установочных колец на валу электродвигателя, соединения втулок с зубчатыми колесами металлорежущих станков (с отклонениями p, r, s, t, u).

Посадки обозначают дробью, в числителе которой указывают обозначение поля допуска отверстия, а в знаменателе — обозначение поля допуска вала, например H6/t5. Цифры в обозначениях посадок указывают на качество (степень точности), в соответствии с которым для заданного интервала размеров по ГОСТ 25346—89 «Основные нормы взаимозаменяемости. ЕСДП. Общие положения, ряды допусков и основных отклонений» устанавливается допуск. Обозначение посадки указывают после номинального размера элемента, например 50H7/s6 или Ø70H6/t5.

Расчет соединений с натягом. Требуемый натяг обеспечивается подбором соответствующей стандартной посадки. Значение необходимого натяга определяют в зависимости от требуемого контактного давления p , создающего такие силы сцепления, которые бы были больше внешних сдвигающих сил. Упрощенный расчет соединений с натягом основан на допущении, что контактное давление p по поверхности контакта распределено равномерно. Обозначим диаметр и длину посадочной поверхности соответственно d , мм, и l , мм, а коэффициент сцепления f . При одновременном нагружении осевой силой $F_{ос}$, Н, и крутящим моментом $M_{кр}$, Н·мм, нагрузочная способность соединения с натягом обеспечивается условием

$$\sqrt{F_{ос}^2 + (2M_{кр}/d)^2} \leq \frac{\pi d l p f}{n_{сц}},$$

где $n_{сц}$ — коэффициент запаса сцепления, $n_{сц} = 2 \dots 4,5$. Отсюда находим значение среднего контактного давления p , Н/мм²:

$$p \geq \frac{n_{сц} \sqrt{F_{ос}^2 + (2M_{кр}/d)^2}}{\pi d l f}.$$

Принимают следующие значения коэффициентов сцепления: для стальных и чугунных деталей при сборке запрессовкой $f = 0,07$, а при сборке температурным деформированием $f = 0,14$; для стальных (или чугунных) при сборке запрессовкой с бронзовыми (или латунными) деталями $f = 0,05$, а при сборке температурным деформированием $f = 0,07$.

Минимальный требуемый натяг должен обеспечивать неразъемность соединения:

$$[N_{min}] \geq \Delta + u + \Delta_t,$$

где Δ — деформация деталей соединения, мкм: вала сплошного сечения с модулем упругости E_1 , Н/мм², и коэффициентом Пуассона μ_1 и втулки с E_2 , Н/мм², и μ_2 . Эта деформация определяется следующей зависимостью:

$$\Delta = p d \cdot 10^3 \left(\frac{1 - \mu_1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \frac{1 + \xi^2}{1 - \xi^2} + \mu_2 \right),$$

где ξ — отношение наружного диаметра втулки к номинальному диаметру соединения.

Температурная деформация Δ_t , мкм, определяется зависимостью

$$\Delta_t = 10^3 [(t_2 - 20)\alpha_2 + (t_1 - 20)\alpha_1],$$

где α_1 и α_2 — коэффициенты линейного расширения; t_1 и t_2 — температура деталей соединения при работе охватываемой и охватывающей деталей соответственно.

Максимальный допустимый натяг должен обеспечить прочность охватывающей детали:

$$[N_{\max}] \leq [\Delta_{\max}] + u,$$

где $u = 5,5(Ra_1 + Ra_2)$ — поправка, мкм, вводимая для учета того, что микронеровности Ra_1 и Ra_2 соответственно охватываемой и охватывающей деталей частично срезаются.

Максимальная деформация $\Delta_{\max}$, допускаемая прочностью охватывающей детали, определяется так:

$$[\Delta_{\max}] = [p_{\max}] \Delta / p.$$

Максимально допускаемое контактное давление $[p_{\max}]$ зависит от прочности охватывающей детали. По гипотезе наибольших касательных напряжений

$$[p_{\max}] = 0,5\sigma_{\tau 2}(1 - \xi^2),$$

где $\sigma_{\tau 2}$ — предел текучести материала охватывающей детали.

Подбор стандартных посадок осуществляется по $[N_{\min}]$ и $[N_{\max}]$. Значения натягов стандартных посадок $N_{\min}$ и $N_{\max}$ выбирают таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

$$N_{\text{н.т.}} \geq [N_{\min}], N_{\text{п.х.}} \leq [N_{\max}].$$

Армирование

Одним из способов создания неподвижных соединений является **армирование пластмассовых деталей**. В радио- и электротехнической промышленности прессованием и литьем под давлением получают электрические разъе́мники, колодки, панели. Это позволяет в 10—100 раз сократить трудоемкость изготовления таких деталей по сравнению с трудоемкостью получения аналогичных конструкций путем сборки из отдельных элементов с последующим креплением. Для создания неподвижных соединений арматуру в виде винтов, гаек, штырей (рис. 3.19, а, б) закрепляют с помощью кольцевых буртиков или канавок. Для предотвращения проворачивания на наружных поверхностях этих деталей выполняют

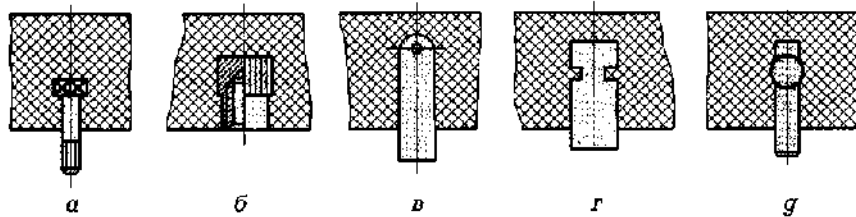


Рис. 3.19

рифления, насечку или плоские грани. Мелкие детали в виде пластин (клеммы электрических разъемов) закрепляют с помощью вырезов или отверстий (рис. 3.19, в, г). Проволочную арматуру расплющивают (рис. 3.19, г).

3.8. РАЗЪЕМНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ

К разъемным соединениям деталей относятся резьбовые, фрикционные с коническими кольцами, клиновые, штифтовые, шпоночные, пальцевые и профильные (бесшпоночные). Разъемные соединения можно неоднократно разбирать и вновь собирать. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в машиностроении разъемные соединения деталей.

Резьбовые соединения

Разъемные соединения, выполненные с помощью резьбовых крепежных деталей — винтов 1 (рис. 3.20, а), болтов 3 и гаск 4 (рис. 3.20, б), шпилек 5 (рис. 3.20, в) или резьбы, нанесенной непосредственно в соединяемой детали б, называются **резьбовыми соединениями**. Резьбовое соединение образуется сопряжением двух деталей по винтовым поверхностям, из которых одна имеет наружную резьбу (болт, шпилька, винт), а другая — внутреннюю (гайка, муфта и другие детали с резьбовыми отверстиями). При сборке и разборке резьбового соединения крепежные винты поворачивают и удерживают от поворота соответствующим инструментом (ключом, отверткой) или непосредственно рукой за головку винта. Винт с гайкой называется **болтом**. Болты применяют для скрепления деталей не очень большой толщины, пластин, фланцев; при необходимости частого завинчивания и отвинчивания; для скрепления деталей из материалов, не обеспечивающих достаточную надежность и долго-

вечность резьбы. Болты не требуют нарезки резьбы в детали, но не всегда удобны при сборке и иногда ухудшают дизайн конструкции.

Винты, ввинчиваемые в одну из соединяемых деталей, применяют в случаях достаточной прочности материала детали и достаточной ее толщины, при отсутствии места для расположения гайки. Если материал соединяемых деталей не обеспечивает достаточной долговечности резьбы при требуемых частых разборках и сборках соединений, вместо винтов применяют **шпильки**.

Гайка — это деталь с резьбовым отверстием, навинчиваемая на винт и имеющая форму, приспособленную для захвата гаечным ключом или рукой. В резьбовом соединении под гайку (или под головку винта) ставят шайбу 2 (см. рис. 3.20, а, б), которая перекрывает зазор между стержнем винта и отверстием, создает дополнительное трение на торце гайки.

Несмотря на то, что все крепежные резьбы удовлетворяют условию самоторможения даже без учета дополнительного трения на торце гайки, опыт эксплуатации показывает, что при переменной и ударной нагрузке происходит ослабление резьбы и самоотвинчивание. Поэтому в ответственных конструкциях для предотвращения самоотвинчивания применяют специальные стопорящие шайбы.

Резьба образуется путем нанесения на поверхность деталей винтовых канавок с сечением согласно профилю резьбы. Образованные таким образом выступы носят название **витков**.

Резьбу классифицируют следующим образом:

- по виду поверхности, на которой образована резьба, — цилиндрическая и коническая;

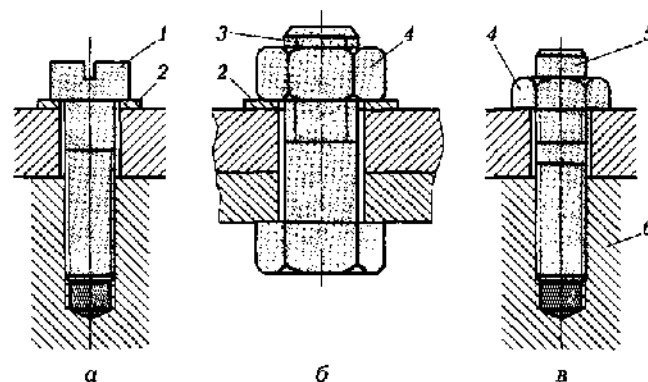


Рис. 3.20

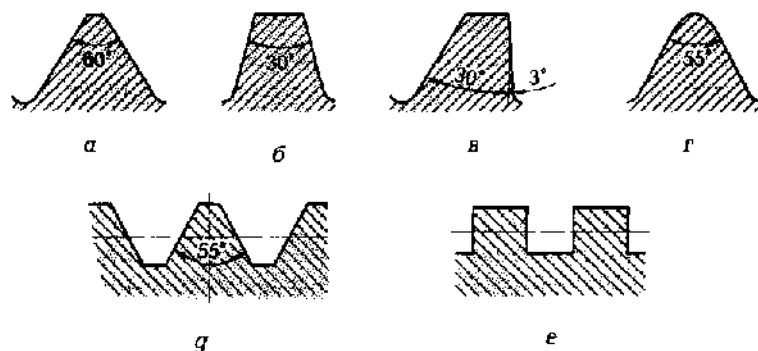


Рис. 3.21

- по признаку расположения резьбы — наружные и внутренние;
- по направлению винтового выступа резьбы — правая и левая;
- в зависимости от числа заходов — однозаходная (образованная одним выступом резьбы) и многозаходная (образованная двумя и более выступами резьбы);
- по профилю — треугольная (рис. 3.21, а, г), трапециевидная (рис. 3.21, б), упорная (рис. 3.21, в), треугольная для трубной цилиндрической резьбы (рис. 3.21, г) и прямоугольная (рис. 3.21, е);
- в зависимости от назначения — крепежная, крепежно-уплотняющая, для преобразования движений вращательного в поступательное, и наоборот;
- по системе размерности — метрическая и дюймовая.

Впадина профиля резьбы может иметь плоскую или закругленную форму (рис. 3.22), последняя предпочтительней. Метрическую резьбу выполняют с крупным и мелким шагом. Каждому наружному диаметру соответствует только один крупный шаг и несколько мелких шагов. Диаметры и шаги метрической резьбы регламентируются ГОСТ 8724 — 2002 «Основные нормы взаимозаменяемости. Резьба метрическая. Диаметры и шаги», а профиль и его размеры — ГОСТ 9150—2002 «Основные нормы взаимозаменяемости. Резьба метрическая. Профиль». Размеры дюймовой резьбы выражаются в дюймах (один дюйм равен 25,4 мм); исходный профиль дюймовой резьбы — треугольник с углом при вершине 55° (см. рис. 3.21, г).

Профиль метрической цилиндрической резьбы (рис. 3.22, а) представляет собой равносторонний треугольник высотой H с углом при вершине $\alpha = 60^\circ$. Вершина треугольника срезана по прямой. Профиль резьбы задается в плоскости ее осевого сечения. Основными параметрами резьбы, общими для наружной резьбы (например, болта) и внутренней резьбы (гайки), соответственно являются d и D — наружные диаметры болта и гайки; d_1 и D_1 — внутренние диаметры болта и гайки; d_2 и D_2 — средние диаметры болта и гайки; P — шаг резьбы; α — угол профиля, $\alpha/2$ — угол между боковой стороной профиля и перпендикуляром к оси резьбы; H — теоретическая высота профиля (высота исходного профиля); h — рабочая высота профиля.

При измерении угла профиля обязательно учитывается угол $\alpha/2$, так как при нарезании резьбы ее профиль может быть завален на сторону (с правой стороны угол может быть больше или меньше, чем с левой стороны), а в целом угол профиля α будет равен 60° .

Шаг резьбы P — это расстояние между параллельными сторонами или вершинами двух рядом лежащих витков, измеренное вдоль оси резьбы.

Угол подъема резьбы ω (рис. 3.22, б) — угол, образованный направлением выступа резьбы и плоскостью, перпендикулярной оси резьбы; он определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{P}{\pi d_2}.$$

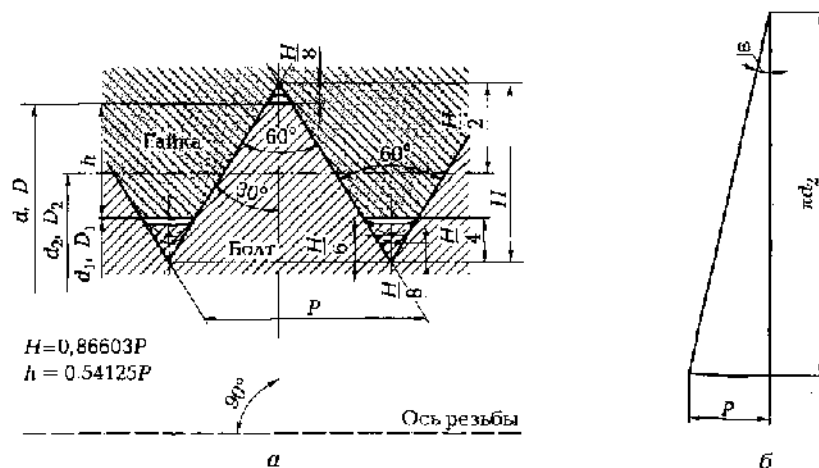


Рис. 3.22

Ход резьбы Ph при однозаходной резьбе равен ее шагу. Если же резьба имеет k заходов, то ход резьбы $Ph = Pk$, т. е. за один оборот гайка переместится в осевом направлении в k раз дальше.

Резьбовые соединения получили большое распространение в машиностроении благодаря ряду достоинств: простоте конструкции; технологичности изготовления; удобству сборки-разборки; возможности применения для регулирования взаимного расположения деталей; возможности механизации с использованием резьбозавертывающего инструмента, что облегчает монотонный труд рабочих-сборщиков и повышает качество сборки; высокой нагрузочной способности. В современных машинах детали, имеющие резьбу, составляют свыше 60 % общего числа деталей.

Недостатком резьбовых соединений является высокая концентрация напряжений, что снижает прочность при работе конструкции в условиях переменных нагрузок.

Расчет на прочность резьбовых соединений. Под действием осевой силы (силы затяжки) в стержне, на котором нарезана резьба (в шпильке, болте, винте), возникают напряжения растяжения, в теле гайки — сжатия, в витках резьбы — смятия, среза. На прочность резьбовое соединение рассчитывают только по критерию прочности на растяжение той части стержня, на которой нарезана резьба. За расчетный диаметр резьбы принимается $d_{\text{рас}} = d - 0,94P$, где d — наружный диаметр, а P — шаг резьбы. Остальные размеры деталей резьбового соединения (шайбы, гайки) принимают в соответствии со стандартами исходя из наружного диаметра резьбы.

Расчет на прочность одиночного болта, затянутого постоянной силой F_0 . Так рассчитывают болты, которые применяются для закрепления крышек редукторов, корпусов других механизмов и машин. В момент затягивания болт работает на растяжение и кручение. От силы затяжки F_0 в поперечном сечении возникают нормальное напряжение растяжения $\sigma_p = F_0 / (\pi d_{\text{рас}}^2 / 4)$ и касательное напряжение кручения $\tau_k = M_{\text{кр}} / W_p$. Крутящий момент $M_{\text{кр}}$ при завинчивании возникает в результате действия сил трения в резьбе, равнодействующая которых (будем считать) приложена на половине среднего диаметра резьбы d_2 . Назовем равнодействующую этих сил окружной силой $F_{\text{окр}}$, создающей момент сопротивления относительно оси болта при его завинчивании. Тогда крутящий момент от этой силы $M_{\text{кр}} = F_{\text{окр}}(d_2/2)$. В свою очередь, окружная сила зависит от силы затяжки F_0 , угла подъема резьбы ψ и приведенного угла трения $\phi' = \arctg f' = \arctg(f/\cos \gamma)$, где f — коэффициент трения скольжения; γ — угол наклона грани профиля резьбы: $\gamma = 30^\circ$ для метрической, $\gamma = 15^\circ$ для трапецеидальной и $\gamma = 3^\circ$ для упорной резьбы.

$$F_{окр} = F_0 \operatorname{tg}(\psi + \varphi').$$

Полярный момент сопротивления W_p определяется по расчетному диаметру резьбы:

$$W_p = \pi d_{рас}^3 / 16.$$

Итак, выразим напряжение кручения с учетом полученных зависимостей:

$$\tau_k = M_{кр} / W_p = [8 F_0 d_2 \operatorname{tg}(\psi + \varphi')] / (\pi d_{рас}^3).$$

По четвертой теории прочности, согласно которой критерием предельного состояния является энергия формоизменения, определим эквивалентное напряжение

$$\sigma_{эв} = \sqrt{\sigma_p^2 + 3\tau_k^2} = \sigma_p \sqrt{1 + 3(\tau_k / \sigma_p)^2}.$$

Вычислим отношение

$$\tau_k / \sigma_p = \frac{8 F_0 d_2 \operatorname{tg}(\psi + \varphi')}{\pi d_{рас}^3} \frac{\pi d_{рас}^3}{4 F_0} = \frac{2 d_2}{d_{рас}} \operatorname{tg}(\psi + \varphi').$$

Для метрической резьбы с крупным шагом можно принять $d_2 = 1,1 d_{рас}$, $\psi = 2^\circ 30'$, $f = 0,2$, $\varphi' = 9^\circ 45'$ (при $\gamma = 30^\circ$). В этом случае эквивалентное напряжение

$$\sigma_{эв} \approx 1,3 \sigma_p.$$

Практически, при расчете болта на совместное действие растяжения и кручения используют не силу затяжки F_0 , а расчетную силу $F_{рас}$, которую принимают:

для метрических резьб $F_{рас} = 1,3 F_0$;

для трапецидальных резьб $F_{рас} = 1,25 F_0$;

для упорных и прямоугольных резьб $F_{рас} = 1,2 F_0$.

Из условия прочности $\sigma_{эв} \leq [\sigma]_p$ определяют расчетный диаметр резьбы:

$$\sigma_{эв} = F_{рас} / (\pi d_{рас}^2 / 4) \leq [\sigma]_p,$$

откуда

$$d_{рас} \geq \sqrt{\frac{4 F_{рас}}{\pi [\sigma]_p}}.$$

Допускаемое напряжение растяжения выбирают в зависимости от предела текучести σ_T материала болта и коэффициента запаса прочности n_T :

$$[\sigma]_p = \sigma_T / n_T.$$

При расчете болтов с неконтролируемой затяжкой коэффициент запаса прочности n_t принимают в зависимости от диаметра резьбы d и материала болта:

	$d = 6...16$ мм	$d = 16...30$ мм	$d = 30...60$ мм
Углеродистая сталь	5...4	4...2,5	2,5...1,6
Легированная сталь	6...5	5...3,3	3,3...3

Для силовых соединений болты с $d < 8$ мм не применяют, так как при неконтролируемой затяжке можно разрушить резьбовое соединение.

При контролируемой затяжке коэффициент запаса прочности n_t принимают для углеродистых сталей 1,7...2,2, а для легированных — 2...3.

Расчет на прочность болта выполняют в следующей последовательности.

1. Ориентировочно задают диаметр резьбы и назначают n_t .

2. Вычисляют расчетный диаметр резьбы $d_{рас}$. Если он не попадает в принятый интервал, то расчет повторяют снова с п.1. Таким образом, задача решается методом последовательных приближений.

Резьбовые соединения получили большое распространение в машиностроении. В современных машинах детали, имеющие резьбу, составляют свыше 60 % общего числа деталей.

Клиновое соединение

Разъемное соединение, затягиваемое или регулируемое с помощью клина, называется **клиновым соединением**. Типичным примером клинового соединения является соединение типа «ласточкин хвост» (рис. 3.23) каретки 1 с направляющими 2 суппорта металло-режущего станка, в котором зазор регулируется перемещением клина 3 благодаря конусности одной его стороны 1 : 50 или 1 : 100.

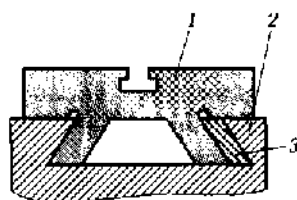


Рис. 3.23

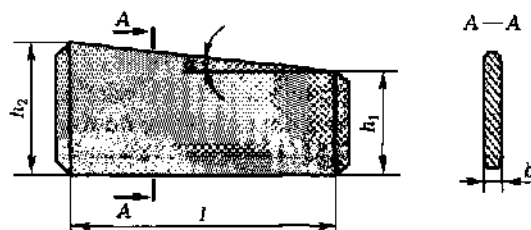


Рис. 3.24

В клиновых соединениях применяют почти исключительно односторонние клинья, так как двухсторонние являются более сложными в изготовлении, а преимуществ по сравнению с односторонними не имеют.

Рабочие поверхности клиньев выполняют цилиндрическими или плоскими с фасками (рис. 3.24). В силовых клиновых соединениях выбирают уклоны 1 : 100, 1 : 40, 1 : 30. Установочные клинья имеют уклоны 1 : 10, 1 : 6, 1 : 4.

Если клин соединяет со втулкой вал диаметром d , то толщина клина (из условия равнопрочности вала на растяжение и на смятие клином) $b = (0,25 \dots 0,30)d$; высота сечения клина $h \leq 2,5b$. Чтобы клин не выдавливался из гнезда, необходимо соблюдать соотношение между углом трения φ и углом наклона α : $\alpha \leq 2\varphi$, причем для одностороннего клина

$$\operatorname{tg} \alpha = (h_1 - h_2)/l.$$

Достоинствами клинового соединения являются быстрота сборки и разборки, возможность создания больших сил затяжки и восприятия больших нагрузок, относительная простота конструкции.

По назначению клиновые соединения подразделяют на силовые, предназначенные для прочного скрепления деталей, и установочные, предназначенные для установки и регулирования требуемого взаимного положения деталей.

Наиболее характерными областями применения силовых клиновых соединений являются соединения тяг, поршневых штоков с ползунами, половинок маховиков, вала и ступицы (клиновыми шпонками), а также использование в технологических приспособлениях для закрепления деталей при обработке на металлорежущих станках, в сборных литейных моделях.

Типовыми примерами установочных клиновых устройств являются башмаки и клинья для выверки и установки машин, заготовок на столах станков и т. п.

Соединения штифтами

Штифты предназначены в основном для взаимного фиксирования деталей, а также для передачи относительно небольших нагрузок. Применяются и специальные срезающиеся штифты, служащие предохранительным элементом в муфтах.

Штифты подразделяют на гладкие, с насеченными или выдавленными канавками, пружинные. По форме штифты бывают ци-

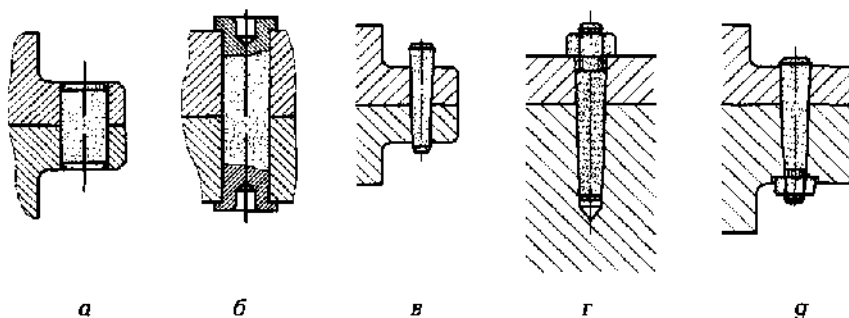


Рис. 3.25

линдрическими и коническими. Гладкие штифты изготавливают из стали 45 и А12, штифты с канавками и пружинные — из пружинной стали.

Цилиндрические штифты ставят в отверстия с натягом (рис. 3.25, а); иногда концы штифтов расклепывают (рис. 3.25, б). В деталях, которые постоянно подлежат разборке, отверстие в одной детали развертывают, что позволяет разъединять соединение без выколачивания штифтов.

Наибольшее распространение получили гладкие конические штифты, их выполняют с конусностью 1 : 50. Простые штифты, забиваемые в отверстия (рис. 3.25, в), используют только для сквозных отверстий, когда с противоположной стороны их можно выбить. Штифты с резьбой для извлечения при разборке (рис. 3.25, г) применяются для установки в глухие отверстия. Штифты с резьбой, затягиваемой гайкой (рис. 3.25, г), используются в соединениях, подверженных толчкам и ударам, а также в быстровращающихся узлах.

Для передачи нагрузки используют штифты с канавками, что позволяет осуществлять повторные сборки и разборки.

Шпоночные соединения

Соединения деталей, предназначенных для передачи главным образом вращательного движения (вала со шкивом или с зубчатым колесом), часто осуществляют посредством шпоночных соединений. Эти соединения применяют в тех случаях, когда к точности центрирования соединяемых деталей не предъявляется особых требований. Соединение шпонками 1 может быть неподвижным (рис. 3.26) или подвижным (рис. 3.27) вдоль оси вала 2. В последнем слу-

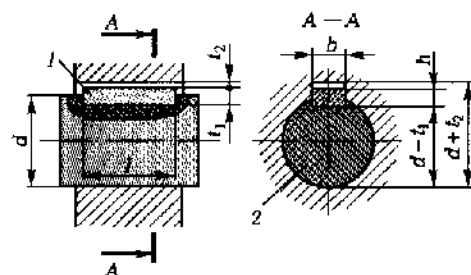


Рис. 3.26

чае направляющая шпонка 1 притягивается к валу винтами 3. В указанных соединениях применяются призматические шпонки; обычно ставят одну, а при большой напряженности конструкции — две шпонки под углом 120 или 180°.

Недостатком призматических шпонок является трудность обеспечения их взаимозаменяемости, т. е. необходимость ручной пригонки или подбора шпонок в ответственных соединениях, что ограничивает их применение в крупносерийном и массовом производстве.

Призматические шпонки (простые — см. рис. 3.26 и направляющие — см. рис. 3.27) выполняют прямоугольного сечения; ширину шпонок b выбирают равной $(0,25 \dots 0,30)d$, для самых крупных валов — $0,2d$. Размеры сечений призматических шпонок $b \times h$ и пазов стандартизированы, их выбирают в зависимости от диаметров валов d . Шпонка примерно на половину высоты входит в паз вала и на половину — в паз ступицы колеса. Боковые (рабочие) грани шпонки передают вращение от вала к колесу и обратно.

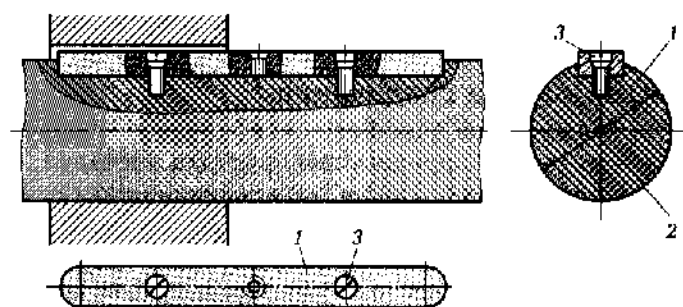


Рис. 3.27

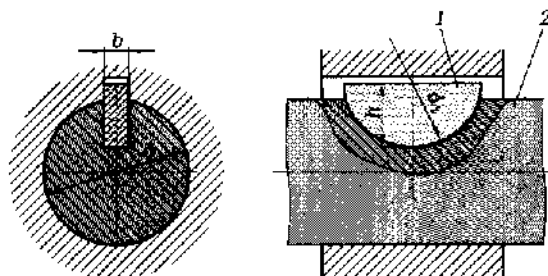


Рис. 3.28

По форме стандартные шпонки подразделяются на призматические, клиновые, сегментные, цилиндрические с прямоугольным поперечным сечением, шестигранные, цилиндрические, торцовые и др.

Сегментные шпонки 1 (рис. 3.28) применяют в связи с технологичностью соединения, не требующего ручной пригонки. Достоинством соединения является также устойчивое положение шпонки в валу 2, что исключает ее перекося и концентрацию давления. При коротких ступицах сегментные шпонки устанавливают по одной, при длинных — по две по длине ступицы.

Сегментные шпонки для вала диаметра d характеризуются двумя основными параметрами: шириной b и диаметром d_1 . Ширину и глубину врезания в ступицу выбирают примерно такими же, как и у призматических шпоночных соединений.

Высоту h выбирают около $0,4d_1$. Длина шпонок близка к d_1 .

Недостатком сегментных шпонок является необходимость глубокой канавки на валу.

Шестигранные шпонки обладают более высокой несущей способностью, чем обычные четырехгранные, так как их рабочие грани нагружаются более равномерно. Недостатком этих шпонок является наличие большей распорной силы, вызывающей деформирование ступицы и некоторое смещение ее оси.

Цилиндрические шпонки-штифты вставляют в отверстия, которые высверливают параллельно оси вала (половина диаметра в валу, половина — в ступице). Цилиндрические шпонки применяют только при расположении ступицы на конце вала, преимущественно на валах малой длины. Цилиндрические шпонки создают также радиальную распорную силу.

Торцовые призматические шпонки служат для соединения двух тел вращения по торцовой поверхности. Торцовые шпонки применяют при передаче значительных моментов фланцевыми со-

единениями валов, цилиндров станков с инструментальными головками и т.д. Во избежание появления поперечной нагрузки в соединяемых деталях шпонки применяют по две и располагают под углом 180° .

Клиновые шпонки *1* представляют собой клинья обычно с уклоном $1:100$ (рис. 3.29). В отличие от призматических у клиновых шпонок рабочими являются широкие грани, а по боковым граням имеется зазор. Клиновые шпонки создают напряженное соединение, способное передавать не только крутящий момент, но и осевое усилие. Однако клиновые шпонки вызывают радиальные смещения оси ступицы по отношению к оси вала *2* на величину радиального посадочного зазора и контактных деформаций, а следовательно, увеличивают биение насаженной детали. При коротких ступицах возможен перекос соединяемых деталей, поэтому область применения клиновых шпонок в настоящее время резко сократилась. В точном машиностроении их совершенно не используют. Шпонки с головками, удобные при необходимости частой разборки, требуют специальных защитных ограждений.

Достоинством соединений клиновыми шпонками является отсутствие зазоров и поэтому хорошее восприятие ударных нагрузок.

На продольных разрезах все шпонки показывают нерассеченными.

Материалом для шпонок служит чистотянутая сталь с временным сопротивлением разрыву не менее 590 МПа.

Проверочный расчет соединения призматическими шпонками осуществляют на смятие боковых поверхностей выступающей части шпонки над валом, Н/мм²:

$$\sigma_{\text{см}} = F_{\text{окр}}/S_{\text{см}} \leq [\sigma].$$

Окружную силу $F_{\text{окр}}$, Н, определяют в зависимости от крутящего момента $M_{\text{кр}}$, Н·мм, и диаметра вала d , мм, следующим образом: $F_{\text{окр}} = M_{\text{кр}}/(d/2)$.

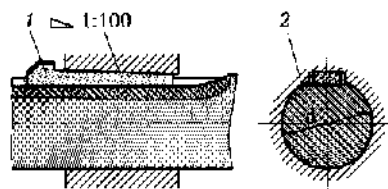


Рис. 3.29

Найдем площадь смятия $S_{см}$ (с учетом высоты фаски $f_{ф} \approx 0,06h$):

$$S_{см} = (h - t_1 - f_{ф})l_{раб} = (h - t_1 - 0,06h)l_{раб} = (0,94h - t_1)l_{раб}.$$

Для призматических шпонок (ГОСТ 23360—78*) 2-го исполнения с плоскими торцами $l_{раб} = l$, а для 1-го и 3-го исполнений нужно из длины шпонки l вычесть длину участков с закруглениями.

Окончательно получаем зависимость для определения напряжения смятия:

$$\sigma_{см} = \frac{2M_{кр}}{d(0,94h - t_1)l_{раб}} \leq [\sigma],$$

которую и применяют при проверочных расчетах.

При проектировочных расчетах после выбора размеров поперечного сечения шпонки в соответствии с ГОСТ 23360—78*, определяют расчетную рабочую длину $l_{раб}$, после чего из стандартного ряда — длину шпонки l .

Допускаемые напряжения смятия для шпоночных соединений:

- при стальной ступице — 130...200 Н/мм²;
- при чугунной ступице — 80...110 Н/мм².

Бóльшие значения принимают при постоянной нагрузке, меньшие — при ударной.

Предельные отклонения размеров шпонки назначаются в соответствии со следующими посадками: ширина b — h9; высота h — h11; длина l — h14.

Предельные отклонения размеров шпоночных пазов назначаются в соответствии со следующими посадками:

- свободное соединение — вал (H9), втулка (D10);
- нормальное соединение — вал (N9), втулка (JS9);
- плотное соединение — вал и втулка (P9).

Шлицевые соединения

Для более точного центрирования деталей на валах применяют шлицевые соединения. По сравнению со шпоночными соединениями они передают бóльшие крутящие моменты, имеют бóльшую усталостную прочность. На валах делают выступы, а на детали — впадины соответствующих форм и размеров.

Наибольшее распространение получили шлицевые соединения (рис. 3.30) с прямобочным (рис. 3.30, а), эвольвентным (рис. 3.30, б)

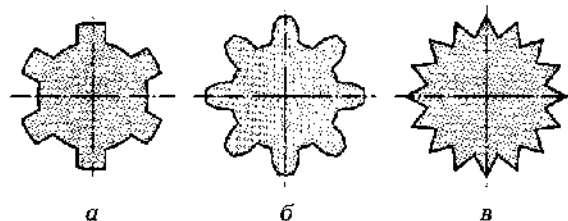


Рис. 3.30

и треугольным (рис. 3.30, в) профилями зубьев. Шлицевые соединения выполняют с разным числом зубьев (от 6 до 20 — у прямоугольных, от 12 до 50 — у эвольвентных).

Шлицевые соединения применяют в качестве неподвижных для постоянного соединения ступицы с валом, неподвижных без нагрузки, например для переключения блока шестерен, и подвижных под нагрузкой.

Как правило, при ограниченных диаметральных габаритных размерах выполняют неподвижные шлицевые соединения треугольного профиля с модулем от 0,2 до 1,5 мм и числом шлицов от 20 до 70.

Прямоугольные шлицевые соединения имеют наибольшее распространение в общем машиностроении. Центрирование ступицы на валу осуществляется по боковым граням шлицов, по наружному и внутреннему диаметру.

Центрирование по боковым граням шлицов не обеспечивает точной соосности ступицы и вала, но обеспечивает более равномерное распределение сил между зубьями (шлицами); поэтому его следует применять при передаче больших крутящих моментов, но при отсутствии высоких требований к точности центрирования.

Характерными примерами центрирования по боковым граням могут служить скользящие зубчатые соединения карданных валов в автомобилях. Центрирование по боковым граням можно применять при числе зубьев 10 и внешнем диаметре от 25 до 90 мм включительно.

В конструкциях, требующих точного центрирования по кинематическим или динамическим условиям, применяют центрирование по наружному или внутреннему диаметру. Если ступицу по отверстию термически не обрабатывают или обрабатывают до невысокой твердости, то по технологическим условиям следует применять центрирование по наружному диаметру. Тогда центрирующие поверхности допускают точную и производительную об-

работку: на ступице — протягиванием, а на валу — крутым шлифованием; 80 % прямобочных зубчатых соединений имеют центрирование по наружному диаметру. Если ступица по отверстию имеет высокую твердость, то применяют центрирование по внутреннему диаметру, обрабатывая центрирующие поверхности вала и втулки шлифованием. По внутреннему диаметру можно обеспечить наиболее высокую точность центрирования.

Соединения эвольвентного профиля (см. рис. 3.30, б) являются весьма перспективными. Профиль очерчивается окружностью выступов, окружностью впадин и эвольвентами, как профили зубьев зубчатых колес. Впадины между зубьями вала могут выполняться с закруглениями. Отличие этого профиля от профиля зубчатых колес заключается в увеличенном угле профиля рейки до 30° (вместо 20°), в уменьшенной высоте зуба до $0,9 \dots 1$ модуля, что связано с отсутствием перекатывания.

Эвольвентный профиль зубчатых соединений имеет следующие достоинства: повышенная прочность и технологичность. Повышенная прочность получается благодаря большому количеству зубьев, утолщению зубьев к основанию и наличию закруглений у основания. Теоретический коэффициент концентрации напряжений при кручении в два раза меньше, чем у прямобочного профиля.

Для обработки шлицевых валов эвольвентного профиля могут быть использованы станки, применяемые для изготовления зубчатых колес. Шлицы в ступицах больших размеров удобно нарезать долбками на зубодолбежных станках. Шлицы в ступицах малых размеров обрабатывают эвольвентными протяжками, которые очень дорогие. Трудоемкость шлифования эвольвентных шлицев в несколько раз больше, чем прямобочных. Это пока ограничивает применение эвольвентных шлицевых соединений.

3.9. ПОДШИПНИКИ СКОЛЬЖЕНИЯ

Подшипники скольжения — это опоры для вращающихся деталей, работающие в условиях относительного скольжения поверхности цапфы по поверхности подшипника, разделенных слоем смазки.

По направлению нагрузок, действующих на подшипники скольжения, последние подразделяют на **радиальные** и **упорные**. Радиальные подшипники воспринимают нагрузки, направленные перпендикулярно оси вала, а упорные подшипники — осевые нагрузки.

Различают несколько типов подшипников:

- гидродинамические подшипники скольжения, в которых слой смазки захватывается поверхностью цапфы в процессе вращения вала. В технической литературе их часто называют просто подшипниками скольжения. По сравнению с другими подшипниками скольжения они используются чаще всего;
- гидростатические подшипники скольжения — в них масляный слой между трущимися поверхностями создается насосом до начала вращения вала. В гидростатических подшипниках уменьшается влияние погрешности размеров шеек валов и подшипников на точность вращения (до 5—10 раз). Они применяются в опорах тяжелых тихоходных барабанов (паровых мельниц, вращающихся печей); опорах с минимальным трением испытательных машин и приборов; опорах для механизмов, требующих точных перемещений (поворотных устройств телескопов, делительных столов); опорах шпинделей прецизионных станков. При пуске паровых турбин, гидрогенераторов используют гидростатическую разгрузку. Недостатками гидростатических подшипников являются большие потери мощности на прокручивание вала даже на холостом ходу, а также сложность конструкции подшипника, необходимость сбора масла, вытекающего из опоры;
- подшипники с воздушной смазкой. Скорость вращения вала в таких подшипниках практически не ограничивается — опоры с воздушной смазкой работают с малыми потерями и ничтожным нагревом, вязкость смазки почти не меняется от изменения температуры (вязкость воздуха в 100 раз меньше вязкости наименее вязкой из применяемых жидких смазок — керосина). Кроме того, ресурс воздуха неограничен, не требуется собирать смазку и по трубопроводам отправлять обратно в масляный бак. Для этих подшипников диаметральный зазоры назначают в пределах 10...30 мкм.

Опоры с воздушной смазкой могут быть *аэродинамическими* и *аэростатическими*. В аэродинамических подшипниках воздух может самозасасываться в зазор из атмосферы через торцы подшипников, в аэростатических — воздух подается под давлением извне еще до начала вращения, таким образом вал поддерживается воздушной подушкой. По эксплуатационным свойствам эти опоры

близки к гидростатическим, но возникающие в них силы трения меньше. Воздушные опоры используют в прецизионных металло-режущих станках, в электрошпинделях внутришлифовальных станков (с частотой вращения $40\,000 \dots 300\,000 \text{ мин}^{-1}$).

Недостатками воздушных опор являются недопустимость перегрузок, приводящих к сухому трению; высокая точность изготовления; необходимость поддержания заданного давления в пневмосети, так как при падении давления в аэростатических опорах возникает аварийная ситуация;

- электромагнитные бесконтактные опоры — используют при очень больших скоростях вращения. Потери в таких опорах ничтожны, и допустимая скорость обычно определяется прочностью ротора. Недостатком является высокая стоимость изготовления.

Подшипник скольжения состоит из корпуса, вкладышей, поддерживающих вал, а также смазывающих и защитных устройств.

Корпус подшипника может представлять собой отдельную литую или сварную деталь, присоединяемую к машине, или может выполняться как единое целое с неподвижной частью машины или с подвижной ее деталью, например с шатуном. Корпуса подшипников выполняют цельными или разъемными.

Разъемный подшипник (рис. 3.31) состоит из корпуса 2, прикрепляемого к станине 1 болтами 3, крышки подшипника 4 со смазочным устройством 5 и съемных вкладышей (полувтулок) 6. Крышка подшипника соединяется с корпусом болтами 7. Зазор между валом и вкладышами регулируется прокладками, а по мере изнашивания вкладышей — подтягиванием болтов 7.

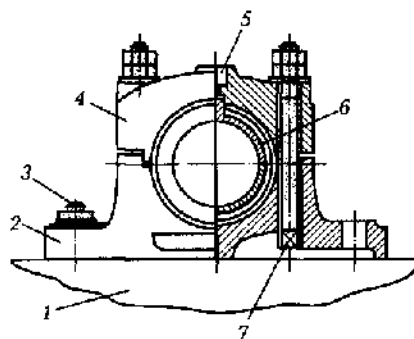


Рис. 3.31

Разъемные корпуса облегчают монтаж валов, допускают регулирование зазоров в подшипнике. Основное применение разъемные корпуса нашли в тяжелом машиностроении.

Вкладыши применяют для того, чтобы не выполнять корпуса подшипников из дорогих антифрикционных материалов, а также для облегчения ремонта подшипников вследствие изнашивания. В неразъемных подшипниках вкладыши выполняют в виде втулок, а в разъемных — в виде полувтулок. Вкладыши за весь срок службы изнашиваются на глубину, измеряемую, как максимум, в десятых долях миллиметра. Однако изготавливают вкладыши гораздо большей толщины, так как этого требуют условия прочности. Вкладыши чаще всего делают биметаллическими: на стальную (чугунную или бронзовую) основу наплавляется тонкий антифрикционный слой.

В мелкосерийном и единичном производстве наряду с биметаллическими вкладышами применяют более простые в изготовлении сплошные вкладыши из антифрикционных материалов средней и высокой прочности. Вкладыши из антифрикционных чугунов, текстолита, прессованной древесины обычно изготавливают сплошными.

Толщина литого вкладыша, устанавливаемого в корпусе, $\delta_a = (0,035 \dots 0,05)d + 2,5$, где d — диаметр цапфы, мм. Толщина заливки принимается $\delta_1 = 0,01d$. Уменьшение толщины заливки благоприятно сказывается на повышении усталостной прочности слоя. Например, уменьшение толщины слоя с 2 до 1 мм увеличивает усталостную прочность баббитового слоя в два раза.

Толщина полиамидного вкладыша $\delta_3 = (0,04 \dots 0,05)d + 1$, толщина пластмассового покрытия $\delta_2 = (0,015 \dots 0,020)d$. В массовом производстве вкладыши штампуют из ленты, на которую нанесен антифрикционный материал. Это приводит к значительной экономии цветных металлов (до 3—10 раз), сокращению трудоемкости (до 10 раз) и повышению качества подшипников.

Существуют следующие оптимальные соотношения между длиной вкладыша l и его внутренним диаметром d :

- в коротких подшипниках скольжения $l = (0,3 \dots 0,4)d$;
- в подшипниках быстроходных поршневых двигателей внутреннего сгорания (авиационных и автомобильных) $l = (0,5 \dots 0,6)d$;
- в подшипниках дизелей $l = (0,5 \dots 0,9)d$;
- в подшипниках жидкостного трения прокатных станов $l = (0,6 \dots 0,9)d$;
- в подшипниках изделий общего машиностроения длина l иногда доходит до $1,5d$.

Материал для подшипников выбирают исходя из условий их работы в паре со стальными цапфами валов. Материалы подразделяют на следующие группы:

- металлические — баббиты, бронзы, сплавы на цинковой основе, сплавы на алюминиевой основе, антифрикционные чугуны;
- металлокерамические;
- неметаллические — пластмассы, древесные пластики, резины и др.

Для гидродинамических подшипников выполняются следующие расчеты.

Расчет по допускаемым давлениям в подшипниках. Как правило, расчет ведут по нагрузке на опору (по реакции R), отнесенной к проекции цапфы:

$$p = \frac{R}{dl} \leq [p].$$

В подшипниках большинства стационарных машин $p = 1 \dots 4 \text{ Н/мм}^2$ в зависимости от условий работы и материалов; в коренных подшипниках двигателей внутреннего сгорания $p = 4 \dots 20 \text{ Н/мм}^2$; в подшипниках валков прокатных станов $p = 15 \dots 50 \text{ Н/мм}^2$.

Расчет используется как проверочный, так как диаметр цапфы уже определен конструктивно после расчета вала.

Расчет по произведению давления в подшипнике на скорость скольжения, $\text{МПа} \cdot \text{м/с}$:

$$pv \leq [pv].$$

Произведение pv характеризует в некоторой степени теплообразование в подшипнике, а также износ.

В подшипниках стационарных машин $pv = 2 \dots 10 \text{ Н} \cdot \text{м}/(\text{мм}^2 \cdot \text{с})$. В опорах скольжения быстроходных и тяжело нагруженных машин при хорошем охлаждении значение pv может быть значительно выше. В подшипниках автомобильных двигателей $pv = 25 \dots 35 \text{ Н} \cdot \text{м}/(\text{мм}^2 \cdot \text{с})$, поршневых авиационных двигателей $30 \dots 50$, прокатных станов $40 \dots 200$, паровых турбин $100 \text{ Н} \cdot \text{м}/(\text{мм}^2 \cdot \text{с})$ и выше.

Пример 3.3

На рис. 3.32 показан вал червячного редуктора, воспринимающего нагрузки радиальные: $R_1 = 9\,000 \text{ Н}$ и $R_2 = 7\,000 \text{ Н}$ и осевую $F = 3\,000 \text{ Н}$. Вал вращается с угловой скоростью $\omega = 7,65 \text{ рад/с}$. Цапфы вала имеют одинаковый диаметр $d = 60 \text{ мм}$, а $d_1 = 65 \text{ мм}$. Вкладыши выполнены в виде вту-

лок из бронзы БрО6Ц6С3. Определить длину вкладышей l и диаметр D торцевой части вкладыша, воспринимающей осевую нагрузку.

Решение.

1. В соответствии с рекомендациями [8], изложенными ранее, для механизма стационарной машины принимаем $[p] = 3 \text{ Н/мм}^2$.

2. Расчет по допускаемому давлению проводим для левой опоры, так как она испытывает большую нагрузку, чем правая. Из зависимости

$$\frac{R_1}{dl} \leq [p] \text{ определяем длину вкладыша}$$

$$l \geq \frac{R_1}{[p]d} = \frac{9\,000}{3 \cdot 60} = 50 \text{ мм.}$$

3. Проверяем пару цапфа—вкладыш на условие $pv \leq [pv]$. Вначале определим окружную скорость

$$v = \omega d/2 = 7,65 \cdot 60/2 = 230 \text{ мм/с} = 0,23 \text{ м/с.}$$

Критерий $pv = 3 \cdot 0,23 = 0,69 \text{ Н} \cdot \text{м}/(\text{мм}^2 \cdot \text{с})$. Допускаемое значение этого критерия для стационарных машин находится в пределах $2 \dots 10 \text{ Н} \cdot \text{м}/(\text{мм}^2 \cdot \text{с})$, что значительно выше фактического.

4. Из условия износостойкости торцевой части вкладыша фактическое давление на его торец

$$p_1 = \frac{F}{\pi(D^2 - d^2)/4}$$

должно быть меньше допускаемого, следовательно:

$$\frac{F}{\pi(D^2 - d^2)/4} \leq [p].$$

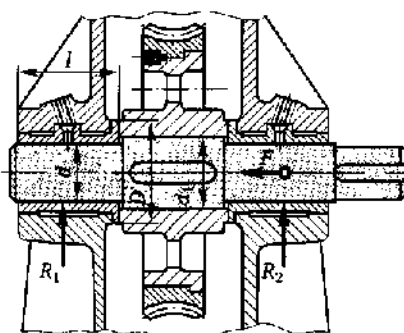
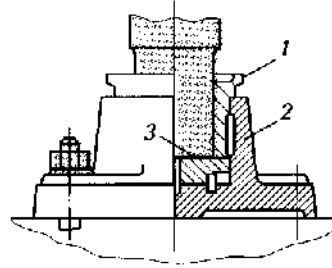


Рис. 3.32

Рис. 3.33



Из этого условия определим диаметр

$$D \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\rho]} + d_1^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3000}{\pi \cdot 3} + 65^2} = 74,15 \text{ мм.}$$

Принимаем $D = 75$ мм.

5. Проверяем на нагрев торцовую часть вкладыша при линейной скорости, соответствующей среднему диаметру опорной поверхности:

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \omega(D + d_1)/2 = 7,65(75 + 65)/4 = 267 \text{ мм/с} = 0,276 \text{ м/с.}$$

При этом критерий $\rho_1 v_{\text{ср}} = 3 \cdot 0,267 = 0,801 \text{ Н} \cdot \text{м}/(\text{мм}^2 \cdot \text{с})$, что значительно ниже допускаемого $[\rho v] = 2 \dots 10 \text{ Н} \cdot \text{м}/(\text{мм}^2 \cdot \text{с})$.

Опоры скольжения вертикально расположенных валов называются **подпятниками** (рис. 3.33). В корпусе 2 подпятника размещается бронзовая или стальная линза 3, которая по мере изнашивания заменяется новой.

В ряде случаев, в зависимости от вида смазки вкладыши изготавливают из дерева, текстолита, винипласта, резины и др. Втулка 1 воспринимает радиальные нагрузки. Корпус подпятника выполняют из серого чугуна или стального литья.

3.10. ПОДШИПНИКИ КАЧЕНИЯ

Подшипники качения — это опоры вращающихся деталей, использующие элементы качения (шарики или ролики). Они состоят (рис. 3.34, а) из внутреннего 1, наружного 2 колец, тел качения 3 и сепаратора 4, разделяющего и направляющего тела качения. По числу тел качения подшипники могут быть однорядные (см. рис. 3.34, а), двухрядные (рис. 3.34, в) и многорядные.

По характеру воспринимаемых нагрузок подшипники качения делятся на радиальные (см. рис. 3.34, а), воспринимающие радиаль-

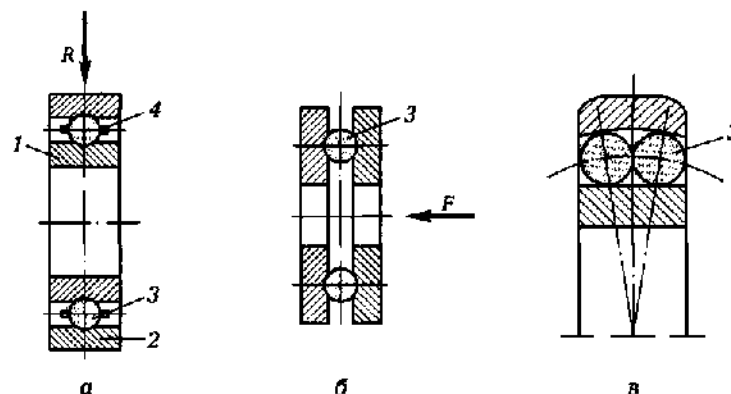


Рис. 3.34

ные нагрузки; упорные (рис. 3.34, б), воспринимающие только осевые нагрузки, и радиально-упорные, воспринимающие радиальные и осевые нагрузки.

По форме тел качения подшипники разделяют на шариковые (см. рис. 3.34) и роликовые. В роликоподшипниках тела качения могут иметь форму коротких цилиндрических (рис. 3.35, а), длинных цилиндрических (рис. 3.35, б), конических (рис. 3.35, в), бочкообразных (рис. 3.35, г), игольчатых (рис. 3.35, д) и витых роликов.

Шарикоподшипники более быстроходны, а роликоподшипники имеют большую грузоподъемность. Цилиндрические роликоподшипники, близкие по быстроходности к шариковым, плохо воспринимают осевые нагрузки. Конические роликоподшипники, обладающие одинаково высокой радиальной и осевой грузоподъемностью, выдерживают меньшие частоты вращения.

Все виды подшипников стандартизованы и в зависимости от размеров, действующих на них нагрузок и долговечности объединены в серии: легкие, средние и тяжелые подшипники.

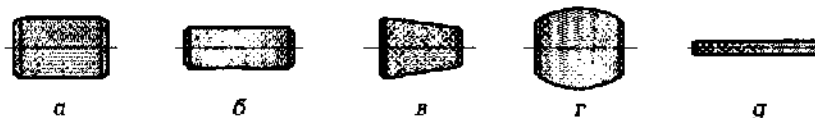


Рис. 3.35

Расчет на долговечность

Подшипники качения теряют работоспособность из-за усталостного разрушения поверхностных слоев дорожек качения и тел качения. Поэтому они рассчитываются на долговечность работы. На основе многочисленных экспериментов была установлена зависимость между нагрузкой Q и ресурсом (суммарным числом L_{10} оборотов до появления признаков усталости):

$$(C_r/Q)^{\alpha} = L_{10}.$$

Для шарикоподшипников $\alpha = 3$, для роликоподшипников $\alpha = 3,33$; C_r — базовая динамическая радиальная расчетная грузоподъемность, которую подшипник может выдержать в течение 10^6 оборотов.

Поскольку подшипники качения подвергаются совместному действию радиальной и осевой нагрузок, то вместо Q подставляют приведенную нагрузку, которая для различных типов подшипников вычисляется по-разному. Кроме того, имеет значение соотношение между осевой и радиальной нагрузками [8].

Подшипники качения в настоящее время являются основным видом опор в машиностроении. Они обладают рядом достоинств. Во-первых, это стандартный узел, наиболее стандартизованный в международном масштабе и централизованно изготавливаемый. В силу этого подшипники качения дешевле, чем подшипники скольжения. Во-вторых, подшипники качения хорошо работают при изменении нагрузок, при различных частотах вращения и реверсах, чего нельзя сказать о подшипниках скольжения. В-третьих, у подшипников качения меньше, чем у подшипников скольжения, пусковые моменты, так как меньше моменты сил трения, а следовательно, и меньше тепловыделение. Далее, поскольку в подшипниках качения чаще всего используют густую смазку, расход смазочного материала меньше по сравнению с подшипниками скольжения. Для подшипников качения не нужно расходовать дорогостоящие цветные материалы, а к материалу и термообработке цапф валов не предъявляют особых требований.

К недостаткам подшипников качения относятся ограниченный срок службы; переменная жесткость, вызывающая возникновение параметрических колебаний; большие размеры диаметров опор; меньшая, чем у подшипников скольжения, способность демпфирования колебаний.

3.11. МУФТЫ

Назначение муфт — соединять друг с другом отдельные валы и передавать при этом крутящий момент. Такие муфты называются **приводными**. Кроме них существуют муфты для соединения труб, тяг и других деталей (они в этом учебнике не рассматриваются).

В Приложении V представлены условные обозначения нерасцепляемых, управляемых и автоматически действующих муфт.

Нерасцепляемые (неуправляемые) муфты используют в случае, когда валы по условиям технологии изготовления и сборки приходится делать составными, причем составной вал должен работать как единое целое. К этой категории относятся: а) глухие муфты 1 (рис. 3.36), которые соединяют соосные валы 2 и 3; б) упругие муфты, назначение которых смягчать ударные нагрузки, а также компенсировать некоторую неточность взаимного положения валов. Примером гибкой муфты является сильфонная муфта 2 (рис. 3.37), которая используется для соединения вала высокомоментного электродвигателя 3 станка с ЧПУ модели ИР500Ф4 с ходовым винтом качения 1; она компенсирует некоторые перекосы и несоосность осей вала электродвигателя и опоры шарикового винта. В то же время возможность увеличения жесткости соединения вал двигателя — ходовой винт исключает даже небольшой относительный поворот соединяемых валов, и они работают как единое целое; в) компенсирующие муфты предназначены для соединения валов с неточно соединенными осями; эти муфты должны компенсировать радиальные, осевые и угловые смещения валов.

Управляемые, или сцепляемые, муфты применяют в машинах или их отдельных узлах, в которых необходимо осуществлять частые остановки и пуски, например в металлорежущих станках и

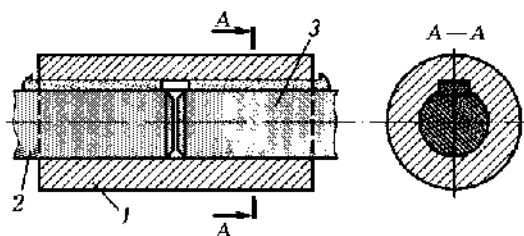


Рис. 3.36

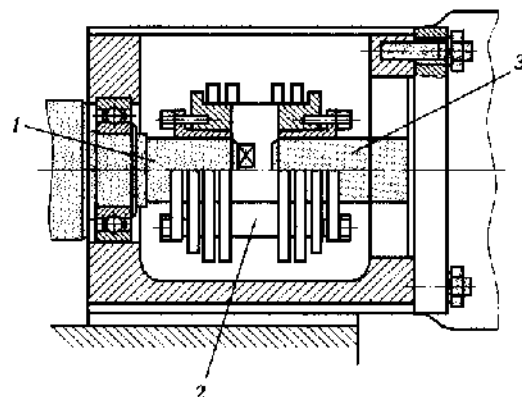


Рис. 3.37

автомобилях. Сцепляемые муфты могут быть с механическими, электрическими, гидравлическими и пневматическими приводами. К механическим сцепляемым муфтам относятся **кулачковые** (или зубчатые) и **фрикционные**. На рис. 3.38 показана сцепляемая кулачковая муфта, которая состоит из двух полумуфт 1 и 2 с торцовыми кулачками, входящими во впадины между кулачками сопряженной полумуфты. Полумуфта 2 может перемещаться по шлицам вдоль вала, а полумуфта 1 жестко соединена с валом. Чтобы уменьшить изнашивание механизмов включения, перемещаемой делают полумуфту на ведомом валу. При соединении двух валов кулачковые муфты требуют точного их центрирования, которое может достигаться центрирующим кольцом. Чаще всего эти муфты приме-

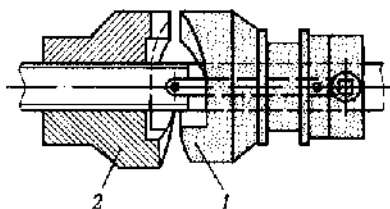


Рис. 3.38

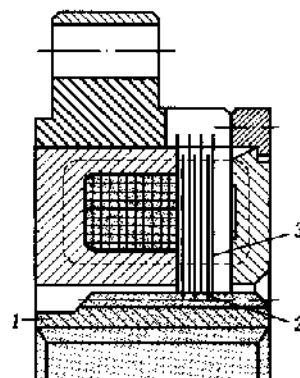


Рис. 3.39

няют для соединения вала и сидящей на нем шестерни; в этом случае обе полумуфты расположены на одном валу (как показано на рис. 3.38) и центрирование соединяемых деталей обеспечено. Очень часто полумуфту 2 заменяют кулачками на торце шестерни или другой соединяемой с валом детали. Для кулачковых муфт характерны отсутствие проскальзывания и малые габаритные размеры. Недостатком является невозможность включения на быстром ходу. Удар сопровождается даже включение на тихом ходу со скоростями менее 1 м/с.

Фрикционные сцепляемые муфты передают крутящий момент благодаря силам трения, обеспечивая плавное соединение ведущего звена с неподвижным валом. Это позволяет избежать динамических нагрузок и шума при пуске, а в транспортных машинах неприятных для человека больших ускорений. Кроме того, фрикционные муфты могут служить предохранительным устройством. По форме рабочих поверхностей фрикционные муфты подразделяются на дисковые, конусные и цилиндрические (с раздвижными колodками).

Сцепляемые муфты электрические, гидравлические и пневматические — это те же фрикционные муфты, но управляемые не механически (через рычажные системы), а с помощью электрической энергии, гидравлики или пневматики.

На рис. 3.39 изображена электрическая управляемая муфта, которая предназначена не передавать крутящий момент, а, наоборот, останавливать вращение, т. е. она выполняет роль тормоза. При подаче электрического сигнала неподвижный пакет магнитопроводящих дисков 3 затормаживает пакет 2, закрепленный с зубчатым колесом 1, и оно останавливается.

Автоматические (самодействующие) муфты срабатывают в определенных условиях без вмешательства человека. К ним относятся: а) обгонные муфты, которые передают момент в одном направлении и допускают свободное относительное вращение в противоположном, поэтому их называют муфтами свободного хода. Термин «обгонная муфта» возник в связи с тем, что они допускают обгон ведущего вала ведомым, если последний получает более быстрое вращение от другой кинематической цепи; б) центробежные муфты служат для автоматического соединения (или разъединения) валов при достижении ведущим валом заданной частоты вращения. Эти муфты являются самоуправляющимися по скорости; в) предохранительные муфты, которые выполняют функцию предохранительного звена при перегрузке машины или ее отдельных механизмов.

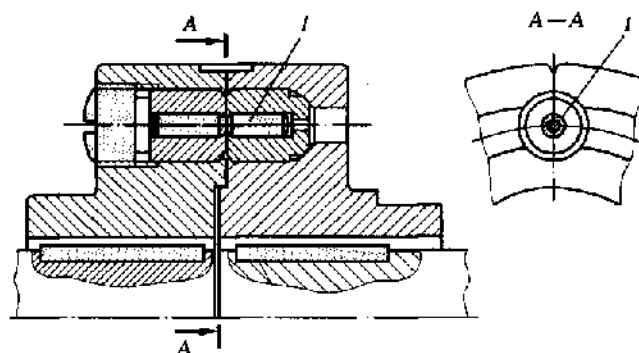


Рис. 3.40

По принципу работы механические предохранительные муфты подразделяются на муфты с разрушающимся элементом, пружинно-кулачковые, фрикционные.

Предохранительные муфты с разрушающимся элементом применяют при резких перегрузках. Недостатком этих муфт является необходимость замены разрушающихся элементов после срабатывания муфты.

Из муфт этого типа в основном применяют муфты со срезными штифтами 1 (рис. 3.40).

Штифты обычно изготавливают из среднеуглеродистой стали (улучшенной или закаленной). В предполагаемом месте разрушения на штифтах делают выточку, которая повышает точность срабатывания, облегчает извлечение штифтов после их разрушения, а также уменьшает опасность повреждения торцевой поверхности муфт. Штифты необходимо устанавливать во втулки, закаленные до высокой твердости, чтобы избежать повреждения их поверхностей. Располагают штифты в удобном для замены месте.

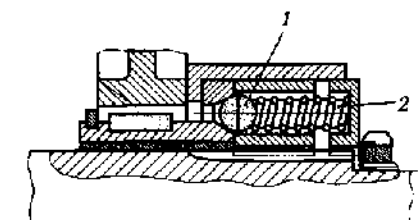


Рис. 3.41

Пружинно-кулачковые предохранительные муфты широко применяют при небольших скоростях и передаваемых крутящих моментах. Они обеспечивают высокую точность срабатывания, так как упругие свойства пружин достаточно стабильны. При высоких скоростях эти муфты не применяют. В пружинно-кулачковых муфтах кулачки могут быть заменены шариками 1 (рис. 3.41). Такие пружинно-шариковые муфты получили широкое распространение благодаря своим достоинствам: они более технологичны, имеют меньший износ и на каждый шарик в конструкции можно поставить отдельную пружину 2, что повышает равномерность нагрузки.

Фрикционные предохранительные муфты применяют при частых кратковременных перегрузках в основном ударного типа. Их выполняют дисковыми или конусными; по конструкции они аналогичны фрикционным муфтам, отличаются лишь отсутствием механизма управления.

3.12. ФРИКЦИОННЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Механическими передачами или просто передачами называют механизмы, служащие для передачи механической энергии на расстояние, как правило, с изменением скоростей и моментов, а иногда и с преобразованием видов и законов движения.

В машиностроении широко применяются различные передачи. В таких машинах, как автомобиль или металлорежущий станок, имеется по несколько десятков зубчатых передач, а мировой выпуск зубчатых колес исчисляется миллионами штук в день.

По принципу работы передачи подразделяются:

- на передачи трением с непосредственным контактом тел качения (фрикционные) и с гибкой связью (ременные);
- передачи зацеплением с непосредственным контактом (зубчатые и червячные) и с гибкой связью (цепные).

Наряду с механическими передачами широко применяют передачи с гидравлическим, пневматическим и электрическим приводами. Далее будут рассмотрены только механические передачи.

Фрикционные передачи — это передачи, в которых движение от ведущего тела к ведомому передается благодаря силам трения. На рис. 3.42 показана простейшая фрикционная передача. Ведущий диск 1 прижимается силой Q к торцовой поверхности диска 2. При вращении диска 1 в точке M возникает сила трения $F_{тр} = f_{тр}Q$, которая приводит во вращение ведомый диск 2. Можно определить, с ка-

кой угловой скоростью будет вращаться ведомый диск. Известно, что передаточное отношение определяется отношением угловых скоростей ведомого звена к ведущему. Для данной передачи

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{v_{\text{вс}}}{v_{\text{вс}}} \cdot \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{r_2}, \text{ т. е. } i = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_{\text{вс}}}{r_{\text{зд}}}.$$

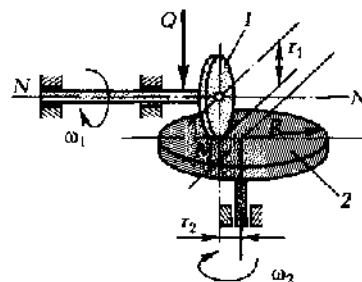


Рис. 3.42

Следовательно, угловая скорость ведомого звена $\omega_2 = i\omega_1 = \omega_1 r_1 / r_2$.

Если диску 1 сообщить поступательное перемещение вдоль оси $N-N$, то у ведомого диска 2 будет бесступенчато меняться угловая скорость, так как радиус r_2 может изменять свое значение от 0 до R .

Такие фрикционные передачи, которые позволяют бесступенчато изменять частоту вращения ведомого звена, называются **вариаторами**.

Наибольший диапазон регулирования частот вращения $D = n_{\text{max}} / n_{\text{min}} = 3 \dots 4$ — у лобовых вариаторов; $D = 8 \dots 10$ — у торковых и конусно-шкивных.

Достоинствами фрикционных передач являются простота конструкции; бесступенчатость регулирования скорости; возможность изменения скорости ведомого звена без остановки ведущего, что очень важно в приводах металлорежущих станков; низкая стоимость изготовления в силу простоты конструкции.

Недостатками являются невозможность (в отличие от зубчатых передач) обеспечить точные передаточные отношения; повышенный износ; необходимость специальных нажимных устройств (чего не требуется зубчатым передачам); большие нагрузки на подшипники. В силу указанных недостатков применение вариаторов в машиностроении ограничено. Они используются в винтовых прессах, приборах, приводах главного движения некоторых станков (например, мод. 1810 — токарно-заточный станок).

3.13. РЕМЕННЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Ременная передача (рис. 3.43, а, б) широко применяется для передачи движения между удаленными друг от друга валами. Она осуществляется посредством шкивов 2, закрепленных на валах, и

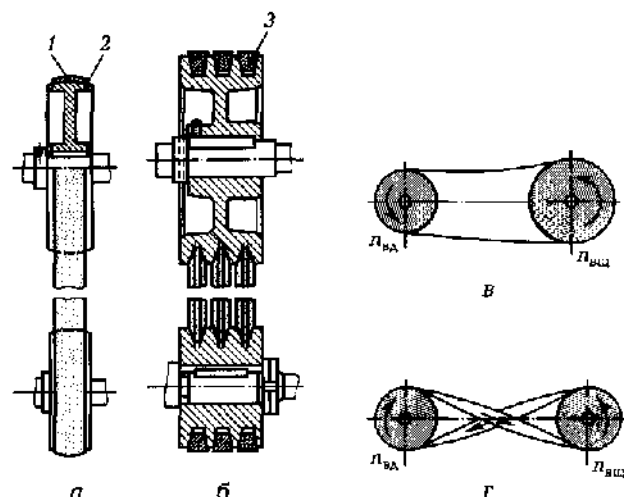


Рис. 3.43

надетых на эти шкивы одного плоского 1 либо нескольких клиновых 3 ремней. Первая называется плоскоременной, а вторая клиноременной передачей.

Достоинствами ременных передач являются возможность осуществлять передачу на значительные расстояния; эластичность привода, смягчающая колебания и нагрузки и предохраняющая от значительных перегрузок (за счет проскальзывания); плавность хода и бесшумность работы; сравнительная простота ухода и обслуживания.

К недостаткам относятся большие габаритные размеры (особенно при больших мощностях); непостоянство передаточного отношения (из-за проскальзывания ремня на шкивах); большое давление на валы и опоры; сравнительно невысокий КПД; неприменимость во взрывоопасных помещениях (ввиду электризации).

Наибольшее распространение ременные передачи получили при мощностях от 0,7 до 50 кВт, реже — до 70 кВт и лишь в отдельных случаях — до 200 кВт.

Плоско- и клиноременные передачи работают при скоростях $v = 5 \dots 25$ м/с, в редких случаях — до 30 м/с. При скоростях до 5 м/с ременные передачи использовать нерационально из-за громоздких размеров.

Плоские ремни изготавливают из кожи, хлопчатобумажных и резиновых тканей, для создания замкнутой гибкой связи их сшивают. Клиновые ремни изготавливают замкнутыми (цельными) опресс-

деленной длины). Такие ремни обеспечивают хороший контакт с канавками шкива и плавную безударную работу передачи.

Передача усилий обеспечивается только при нормально натянутых ремнях. Для этого ремни периодически перешивают или устанавливают специальные устройства, которые регулируют натяжение ремней.

Плоскоременная передача бывает открытая (рис. 3.43, в), направление вращения ведомого вала при которой совпадает с направлением вращения ведущего шкива, и перекрестная (рис. 3.43, г), изменяющая направление вращения ведомого вала на обратное. На продольно-строгальных станках некоторых типов применяют открытую и перекрестную ременные передачи.

Область применения передач разных видов зависит от передаточных отношений: $i = 1/5 \dots 5$ — открытые передачи, $i = 1/6 \dots 6$ — перекрестные, $i = 1/4 \dots 4$ — с направляющими и нажимными роликами, $i = 1/8 \dots 8$ — с натяжными или самонатяжными валами, $i = 1/10 \dots 10$ — с натяжным роликом.

Передаточное отношение и относительное скольжение

Вследствие неизбежного скольжения окружная скорость на ведомом валу v_2 меньше скорости v_1 на ведущем валу:

$$v_2 = (1 - \xi) v_1.$$

Отсюда передаточное отношение

$$i = \frac{n_{вв}}{n_{вш}} = \frac{\omega_{вв}}{\omega_{вш}} = \frac{(1 - \xi) v_1 \cdot 2}{d_2} : \frac{v_1 \cdot 2}{d_1} = \frac{(1 - \xi) d_1}{d_2}, \text{ т. е. } i = \frac{d_1}{d_2} (1 - \xi).$$

В справочниках приведены следующие значения коэффициента скольжения ξ : прорезиненные, текстильные и синтетические ремни — 0,01; кожаные ремни — 0,015; кордтканевые клиновые ремни — 0,2; кордшнуровые клиновые ремни — 0,01.

Геометрические соотношения

В ременных передачах приняты следующие обозначения геометрических параметров: d — диаметр малого шкива (рис. 3.44); D — диаметр большого шкива; a — межцентровое расстояние; L —

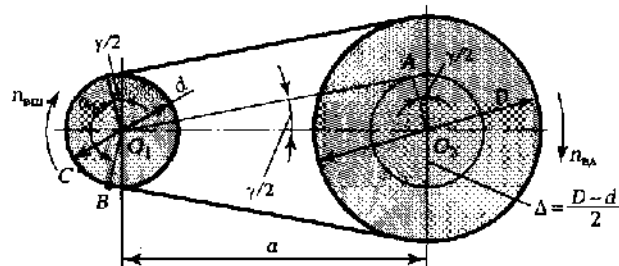


Рис. 3.44

длина ремня; α_1 — угол обхвата на малом шкиве; γ — угол между ветвями.

Значение угла γ определяется из треугольника O_1AO_2 :

$$\sin(\gamma/2) = \Delta/a,$$

где $\Delta = (D - d)/2$.

Отсюда угол между ветвями ремня

$$\gamma = 2\arcsin(\Delta/a) \approx 2\Delta/a.$$

Теперь можно определить угол обхвата на малом шкиве

$$\alpha_1 = 180^\circ - \gamma.$$

Для плоскоремненной передачи рекомендуемый угол обхвата 150° , для клиноремненной передачи — 120° , однако и при угле 90° клиноремненная передача работает достаточно надежно.

Длина ремня без учета провисания и начального деформирования определяется как сумма длин дуг шкивов на углах обхвата, рад, и длин прямолинейных участков ремня:

$$L = \frac{\pi(D + d)}{2} + \gamma \frac{D - d}{2} + 2a \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Поскольку углы γ незначительны, то

$$\cos(\gamma/2) \approx 1 - (1/2)(\gamma/2)^2.$$

Обозначив $(D + d)/2$ через D_{cp} , получим формулу, по которой определяется длина ремня:

$$L \approx \pi D_{cp} + [2 + (\Delta/a)^2]a.$$

Расстояние между осями шкивов при выбранной длине ремня будет равно

$$a = \frac{L - \pi D_{\text{ср}}}{4} + (1/4)\sqrt{(L - \pi D_{\text{ср}})^2 - 8\Delta^2}.$$

Силы и напряжения в ремнях

Связь между мощностями на ведомом (N_2) и ведущем (N_1) валах устанавливается зависимостью

$$N_2 = \eta N_1,$$

где η — КПД ременной передачи.

Крутящие моменты на шкивах определяются в зависимости от передаваемой мощности и частоты вращения шкива, Н·м:

$$M_{\text{кр}} = 9\,550 \frac{N}{n},$$

где N — мощность, кВт; n — частота вращения шкива, мин⁻¹.

Рабочее окружное усилие на шкивах определяют делением крутящего момента на радиус шкива (с учетом коэффициента динамичности нагрузки и режима работы k_d) (табл. 3.5), Н:

$$F = k_d M_{\text{кр}} / (D/2), \text{ или } F = k_d \cdot 2 M_{\text{кр}} / D;$$

если крутящий момент выражен в ньютон-метрах (Н·м), то при расчетах диаметр шкива следует подставлять в метрах (м).

Допускаемое окружное усилие на шкиве F равно разности натяжений ведущей и ведомой ветвей ремня:

$$F = T_1 - T_2.$$

Начальное натяжение в ветвях ремня T_0 при холостом ходе будет оставаться одинаковым как в ведущей, так и в ведомой ветвях:

$$2T_0 = T_1 + T_2.$$

В этом случае провисанием ремня пренебрегают.

Начальное натяжение ремня T_0 выбирают таким образом, чтобы ремень мог сохранять это натяжение достаточно длительное время, не получая большой вытяжки, и имел бы удовлетворительную долговечность.

Окружная сила F на шкивах считается полезной нагрузкой ремня.

Таблица 3.5. Значение коэффициента динамичности нагрузки и режима работы

Нагрузка	Тип машины	Коэффициент k_d
Спокойная. Пусковая нагрузка до 120 % от нормальной	Электрические генераторы; вентиляторы; центробежные насосы и компрессоры; ленточные транспортеры; станки с непрерывным процессом резания; токарные, сверлильные, шлифовальные	1
Умеренные колебания нагрузки. Пусковая нагрузка до 150 % от нормальной	Поршневые насосы и компрессоры с тремя и более цилиндрами; пластинчатые транспортеры; станки-автоматы	1,1
Значительные колебания нагрузки. Пусковая нагрузка до 200 % от нормальной	Реверсивные приводы; станки строгальные и долбежные; поршневые насосы с одним или двумя цилиндрами; транспортеры винтовые и скребковые; винтовые и эксцентриковые прессы с относительно тяжелыми маховиками	1,25
Ударная и резко неравномерная. Пусковая нагрузка до 300 % от нормальной	Подъемники, экскаваторы, драги; эксцентриковые и винтовые прессы с относительно легкими маховиками; пожницы, молоты, мельницы	1,5...1,6

Примечание. При резких и частых пусках двигателя с большими пусковыми моментами коэффициент k_d следует повышать на 0,15. При двухсменной работе коэффициент k_d следует повышать на 0,15, при трехсменной — на 0,35.

Напряжение в ремне **в состоянии покоя** или при холостом ходе определяется отношением начального натяжения к площади поперечного сечения ремня S :

$$\sigma_0 = T_0 / S.$$

Прорезиненные и клиновые ремни неоднородны по структуре. Текстильные ремни имеют несплошное сечение. Однако при расчете все ремни условно считаются однородными и сплошными, и

площадь поперечного сечения ремня принимается равной произведению его ширины b на толщину Δ :

$$S = b\Delta.$$

Для плоских прорезиненных и хлопчатобумажных ремней принимают начальное напряжение в ремне $\sigma_0 = 1,8 \text{ Н/мм}^2 = 1,8 \text{ МПа}$. Если используются автоматические натяжные устройства, которые автоматически компенсируют вытяжку, допустимо повышать σ_0 до 2 Н/мм^2 ; для ремней из синтетических волокон с полиамидным покрытием σ_0 принимают до $7,5 \text{ Н/мм}^2$; для клиновых ремней нормальных сечений $\sigma_0 = 1,2 \dots 1,6 \text{ Н/мм}^2 = 1,2 \dots 1,6 \text{ МПа}$.

Напряжения при рабочем ходе в ведущей и ведомой ветвях ремня определяются в зависимости от натяжения в этих ветвях:

$$\sigma_1 = T_1/S \text{ и } \sigma_2 = T_2/S.$$

Так называемое полезное напряжение в ремне K зависит от окружной силы $F_{\text{окр}}$ на шкиве:

$$K = F_{\text{окр}}/S.$$

В процессе работы ременной передачи в ремне возникают, помимо напряжений растяжения, дополнительное напряжение от инерционных центробежных сил $\sigma_{\text{ц}}$, которое пропорционально квадрату скорости ремня v , а также напряжение изгиба $\sigma_{\text{из}}$, которое пропорционально отношению толщины ремня к диаметру шкива d :

$$\sigma_{\text{из}} \approx E\delta/d,$$

где E — модуль упругости ремня. Следует иметь в виду, что модуль упругости бывших в употреблении ремней больше, чем новых. В среднем модули упругости кожаных ремней $E = 150 \dots 250 \text{ МПа}$, прорезиненных и текстильных — $200 \dots 350 \text{ МПа}$, капроновых — около 600 (при статической нагрузке) и $1\,500 \text{ МПа}$ (при динамической нагрузке), кордшнуровых — $500 \dots 600 \text{ МПа}$.

Максимальное напряжение ремень будет испытывать в точке B контакта ведущей ветви ремня с малым шкивом передачи, а точнее на некоторой «дуге покоя» BC (см. рис. 3.44):

$$\sigma = T_1/S + \sigma_{\text{ц}} + \sigma_{\text{из}}.$$

Максимальное напряжение в ремне влияет на усталостную прочность и долговечность ременной передачи.

Расчет плоскоремennых передач по тяговой способности

Расчет основан на использовании кривых скольжения (рис. 3.45), полученных экспериментальным путем.

Введем понятие «коэффициент тяги»:

$$\varphi = F_{\text{окр}} / (T_1 + T_2),$$

который можно выразить через начальное натяжение в ремне T_0 и напряжение σ_0 . Подставив в эту зависимость вместо $T_1 + T_2 = 2T_0$, получим $\varphi = F_{\text{окр}} / (2T_0)$. Перепишем выражение для коэффициента тяги с учетом, что $T_0 = \sigma_0 S$:

$$\varphi = \frac{F_{\text{окр}}}{2\sigma_0 S} = \frac{K}{2\sigma_0}.$$

Коэффициент тяги представляет собой относительную нагрузку передачи.

Вычислим коэффициент скольжения

$$\xi = \frac{v_1 - v_2}{v_1} 100 \%,$$

где v_1 и v_2 — окружные скорости на ведущем и ведомом шкивах.

Кривые скольжения получают экспериментально следующим образом: при постоянном натяжении T_0 постепенно повышают полезную нагрузку F и определяют коэффициент скольжения ξ .

До некоторого критического значения коэффициента тяги φ_k скольжение вызывается упругими деформациями ремня, которые

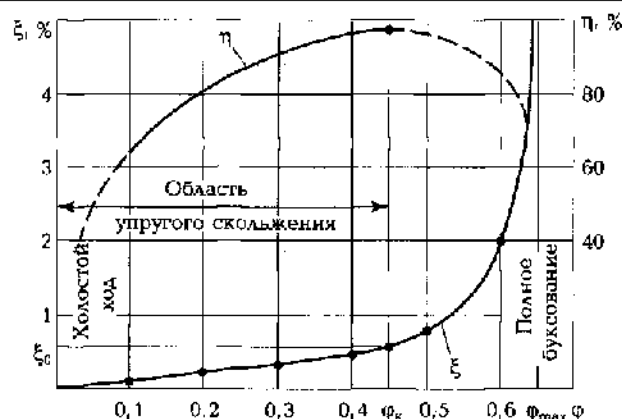


Рис. 3.45

пропорциональны нагрузке; кривая скольжения имеет прямолинейный участок (см. рис. 3.45).

При дальнейшем росте нагрузки возникает дополнительное проскальзывание, при этом суммарное скольжение возрастает скорее, чем нагрузка. Кривая скольжения поднимается резко вверх, и при значении коэффициента тяги $\varphi_{\max}$ наступает полное буксование.

На этом же рисунке показана кривая изменения КПД η ременной передачи. С ростом нагрузки растет и КПД передачи, так как уменьшается влияние потерь холостого хода. Максимальное значение КПД достигается в зоне, соответствующей критическому значению коэффициента тяги φ_k , при меньших нагрузках ременная передача недоиспользуется.

Средние значения φ_k устанавливаются экспериментально: для кожаных и прорезиненных ремней $\varphi_k = 0,6$, для хлопчатобумажных и льняных — примерно 0,5, для шерстяных — примерно 0,4 и для полиамидных — 0,45 ... 0,5.

По кривым скольжения вычисляется отношение $\varphi_{\max}/\varphi_k$, которое характеризует способность ременных передач к перегрузкам.

Кожаные и шерстяные ремни обладают наибольшей нагрузочной способностью ($\varphi_{\max}/\varphi_k = 1,35 \dots 1,5$), для хлопчатобумажных и цельнотканых ремней это соотношение равно 1,25 ... 1,4, а для прорезиненных — 1,15 ... 1,3.

Рациональными следует считать нагрузки, примерно соответствующие точке φ_k на кривых скольжения, но не превышающие ее, так как работу ремня в пределах криволинейного участка кривой скольжения от φ_k до $\varphi_{\max}$ нельзя считать нормальной.

Допускаемое полезное напряжение

Обозначим скольжение, соответствующее критическому значению коэффициента тяги φ_k , через ξ_0 , а полезное напряжение в ремне, соответствующее этой же точке, через K_0 . Для кожаных ремней величина ξ_0 составляет 1 ... 2 %, для прорезиненных и текстильных ремней — ≤ 1 %.

По опытным кривым КПД можно сделать вывод, что $\eta = f(\varphi)$, а следовательно, зависит от K . При нормальных условиях работы в среднем у плоскоремennых передач $\eta = 0,95$.

При нормированном напряжении ($\sigma_0 = 1,6 \dots 2$ МПа) для каждого σ_0 существует линейная зависимость для определения допускаемого полезного напряжения $[K_0]$:

$$[K_0] = a - w(\delta/d),$$

Таблица 3.6. Значения коэффициентов a и w для плоскоременной передачи

Напряжения в ремне, МПа	Коэффициент a , МПа, для ремней			
	кожаных	прорезиненных	хлопчатобумажных	шерстяных тканых
σ_0 :				
1,6	2,7	2,3	2,0	1,7
1,8	2,9	2,5	2,1	1,8
2,0	3,1	2,7	2,2	1,9
w	30	10	15	15

где δ — толщина ремня; d — диаметр наименьшего шкива передачи; a и w — коэффициенты, зависящие от вида ремня (табл. 3.6).

Экспериментально установлено, что на значение допускаемого полезного напряжения влияют условия работы, угол обхвата, скорости и другие факторы. Так, при работе ременных передач в сырых и пыльных помещениях допускаемое полезное напряжение снижают на 10...30 %. При изготовлении ободов шкивов из текстолита коэффициент трения возрастает, и допускаемое полезное напряжение можно повысить на 20 %. Поэтому существует зависимость, с помощью которой находят допускаемое полезное напряжение для действительных условий работы:

$$[K] = [K_0]C,$$

где коэффициент $C = C_1 C_2 C_3 C_4$. Значения этих коэффициентов, которые учитывают расположение передачи (C_1), влияние отношения δ/d (C_2), угол обхвата (C_3) и скоростной коэффициент (C_4), выбирают по справочникам [8].

3.14. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Зубчатая передача является механизмом, который с помощью зубчатого зацепления передает или преобразует движение с изменением угловых скоростей и моментов.

Здесь будут рассмотрены зубчатые передачи, составленные из цилиндрических (рис. 3.46, а) и конических (рис. 3.46, б) зубчатых колес. Зубчатые передачи, в которых вращательное движение пре-

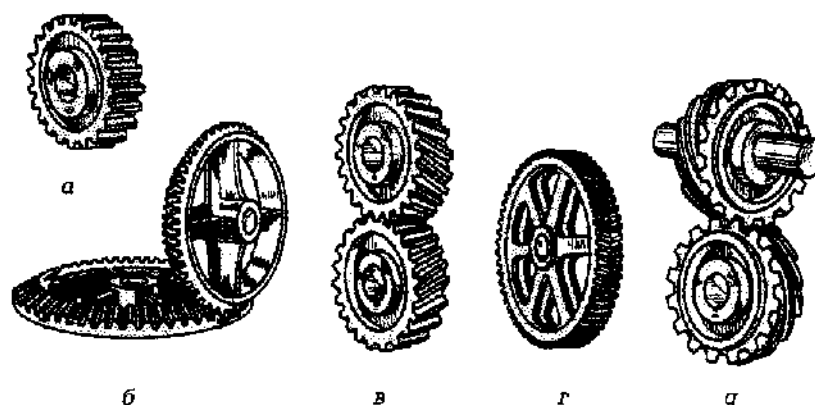


Рис. 3.46

образуется в поступательное, и наоборот, будут рассмотрены в подразд. 3.19.

Для передачи вращения между параллельными валами используют цилиндрические зубчатые колеса (рис. 3.46, в — г). Для преобразования и передачи вращения между валами с пересекающимися осями используют конические зубчатые колеса (см. рис. 3.40, б), а между валами с перекрещивающимися осями — зубчато-винтовые (рис. 3.46, г).

По сравнению с рассмотренными ранее зубчатые передачи имеют существенные преимущества: они надежны в работе, долговечны, имеют высокий КПД, малые габаритные размеры, постоянное передаточное отношение, могут передавать большой крутящий момент. Кроме того, они могут применяться в широком диапазоне скоростей и моментов.

К недостаткам можно отнести шум, ступенчатость регулирования скоростей, невозможность переключать скорости на ходу.

Основные элементы зубчатого колеса

Основным кинематическим условием, которому должен удовлетворять профиль зубьев, является постоянство мгновенного передаточного отношения. Профиль зубьев должен обеспечивать малые скорости скольжения, чтобы передача имела высокий КПД, характеризовалась прочностью и долговечностью. Профиль должен быть легок в изготовлении (нарезание одним инструментом независимо от числа зубьев). Всем этим условиям удовлетворяет

эвольвентное зацепление, которое широко применяется в машиностроении. Элементы эвольвентных зубчатых колес стандартизованы. За основной параметр принят **модуль зубьев m** — величина, пропорциональная шагу P по делительному цилиндру:

$$m = P/\pi.$$

Для косозубых колес, рассматривают окружные шаги P_t и нормальные P_n :

$$P_n = P_t \cos \beta,$$

где β — угол наклона зубьев по делительному цилиндру. Для прямозубых колес $\beta = 0$, следовательно, $P_n = P_t = P$, т. е. окружной и нормальный шаги совпадают. Измеряется шаг по делительной окружности (рис. 3.47) и определяется делением длины этой окружности на число зубьев z :

$$P = \pi d/z.$$

Зная, что $m = P/\pi$, можно выразить диаметр делительной окружности через модуль зубьев:

$$d = mz.$$

Высота зуба h складывается из головки $h_a = m$ и ножки $h_f = 1,25m$. Отсюда высота зуба

$$h = h_a + h_f = 2,25m.$$

Учитывая эти зависимости, запишем выражение диаметров окружностей вершин

$$d_a = m(z + 2)$$

и впадин

$$d_f = (z - 2,5)m.$$

Расстояние между центрами двух зубчатых колес (рис. 3.48), находящихся в зацеплении, определится следующим образом:

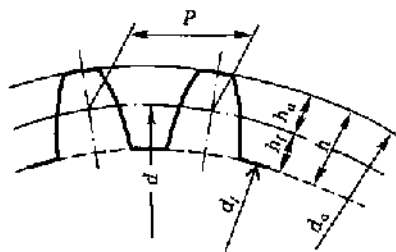


Рис. 3.47

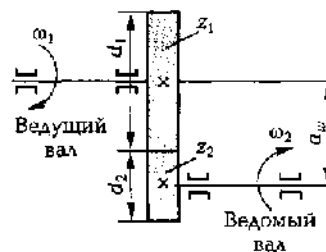


Рис. 3.48

$$a_w = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} = \frac{m_1 z_1}{2} + \frac{m_2 z_2}{2} = m \frac{z_1 + z_2}{2},$$

где z_1 и z_2 — число зубьев первого и второго колеса соответственно; $m_1 = m_2 = m$, так как в зацеплении могут быть зубчатые колеса только одного модуля.

Передаточное отношение найдем из условия отсутствия проскальзывания в точке контакта профилей зубьев, т.е. равенства окружных скоростей $v_1 = v_2$. Пусть угловая скорость ведущего зубчатого колеса будет ω_1 , а ведомого ω_2 .

Тогда, $v_1 = \omega_1 \frac{d_1}{2} = \frac{\omega_1 m_1 z_1}{2}$, $v_2 = \frac{\omega_2 m_2 z_2}{2}$. Учитывая, что $m_1 = m_2 = m$,

получим $\frac{\omega_1 m z_1}{2} = \frac{\omega_2 m z_2}{2}$, или $\omega_1 z_1 = \omega_2 z_2$. Отсюда передаточное отношение

$$i = \frac{\omega_{\text{вд}}}{\omega_{\text{вн}}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2},$$

т.е. передаточное отношение зубчатой передачи равно отношению числа зубьев ведущего зубчатого колеса к числу зубьев ведомого.

Материалы для изготовления зубчатых колес

Для тихоходных передач, преимущественно крупногабаритных и открытых передач, применяют чугуны. Они относительно хорошо сопротивляются заеданиям, поэтому могут работать при скудной смазке. Применяются чугуны СЧ21, СЧ24, модифицированные чугуны СЧ30 и СЧ35, а также высокопрочные чугуны с шаровидным графитом.

Для изготовления зубчатых колес больших диаметров используют стальное литье (стали 35...50), а также литейные марганцовистые и низколегированные стали 40ХЛ, 30ХГСА, 50Г2.

В слабонагруженных передачах применяют пластмассовые зубчатые колеса в паре с металлическими. Такие колеса бесшумны в работе, химически стойкие, к тому же они обеспечивают самосмазываемость. В слабонагруженных передачах зубчатые колеса изготавливают из текстолита, древесно-слоистых пластиков, капрона, капролона, полиформальдегида. Из существующих марок текстолита следует рекомендовать марки ПТ и ПТК; из древесно-слоистых пластиков — ДСП-Г со звездообразным расположением шпо-

на (волокна каждого слоя шпона смещены на $25 \dots 30^\circ$). Зубчатые колеса из капрона Б при чистой смазке после некоторого времени работы перестают изнашиваться. Капролон и полиформальдегид в настоящее время являются наиболее перспективным материалом для зубчатых колес.

Для средненагруженных колес, особенно в станкостроении, используются стали 40Х, 40ХН с поверхностной закалкой токами высокой частоты.

В массовом и крупносерийном производстве применяют зубчатые колеса высокой твердости, которые отделочным операциям подвергаются после термической обработки. Ранее основным видом термической обработки являлась объемная закалка. Колеса изготавливали из сталей марки типа 40Х, а в более ответственных случаях из сталей марок 40ХН, 40ХН2МА и др. Однако объемная закалка не сохраняет вязкую сердцевину при высокой твердости поверхности (обычно $45 \dots 55$ HRC), поэтому в настоящее время объемная закалка уступает место поверхностным термическим и химико-термическим методам упрочнения (более подробно это будет рассмотрено в главе 4).

Для ответственных зубчатых колес, особенно работающих с перегрузками и ударными нагрузками, рекомендуется применять хромоникелевые стали марок 12ХН13А, 18Х2Н4МА, 20Х2Н4А и безникелевые стали 18ХГТ, 25ХГТ и 15ХФ с последующей цементацией и закалкой.

Зубчатые зацепления со смещением (корректированные)

Корректированные зубчатые колеса получают в результате расчетных смещений режущего инструмента.

В этом случае делительная и начальная окружности могут не совпадать. Обычно применяют корректирование для зубчатых колес с малым числом зубьев одного или обоих зубчатых колес передачи. Расчетные формулы для определения межосевого расстояния, высоты зуба, диаметра начальной окружности, диаметров окружностей впадин и вершин, толщины зуба по делительной окружности приводятся в справочниках [8].

Начальными окружностями сопряженной пары зубчатых колес называются окружности, имеющие центры на осях зубчатых колес и катящиеся одна по другой без скольжения, касаясь друг друга в **полусе зацепления** p (рис. 3.49). Для некорректированного

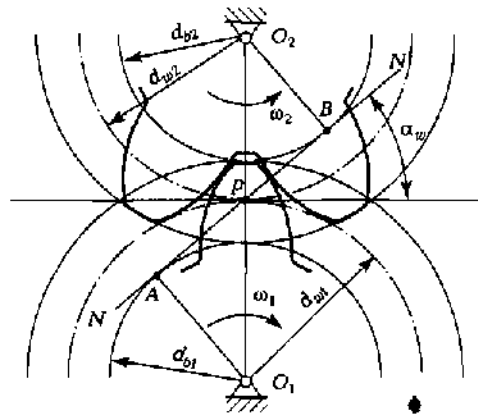


Рис. 3.49

колена диаметр начальной окружности совпадает с диаметром делительной окружности $d_w = d$.

При качении без скольжения прямой NN по окружностям $d_b = d_w \cos \alpha_w$ (где угол α_w — **угол зацепления**) точки этой прямой на каждом из колес описывают эвольвенту. Поэтому окружность диаметром d_b называется **основной**.

Прямая NN называется **линией зацепления**, а отрезок AB на этой прямой — **длиной зацепления**.

Виды и причины эксплуатационных повреждений

В зависимости от условий работы основными видами разрушений и повреждений являются поломки, усталостное выкрашивание поверхностных слоев зубьев, абразивное изнашивание, заедание зубьев, пластическое течение поверхностных слоев и повреждение торцов зубьев.

Поломка зубьев является наиболее опасным видом разрушения, приводящим к выходу из строя передачи и повреждению валов и подшипников из-за попадания в них обломившихся кусков. Например, в токарных и токарно-револьверных станках некоторых моделей доля поломок составляет 50...60 %, в консольно-фрезерных станках доходит до 90 %. В токарных станках поломки преимущественно происходят при обдирочных операциях заготовок большего диаметра, а также при прерывистом обтачивании; во фрезерных станках — при частых пусках или торможениях при

работе на высоких скоростях шпинделя, при режимах фрезерования, вызывающих резонанс крутильных колебаний в упругой системе главного привода.

Для предотвращения поломок зубья необходимо рассчитывать на изгиб.

Усталостное выкрашивание поверхностных слоев зубьев также является наиболее распространенным видом повреждения зубьев. Выкрашивание заключается в появлении на рабочих поверхностях эвольвенты небольших «оспинок», которые потом разрастаются.

Для предотвращения выкрашивания зубья необходимо рассчитывать на поверхностную выносливость.

Абразивное изнашивание является основной причиной выхода из строя открытых передач. В закрытых передачах также может возникать это явление, если машина работает в среде, засоренной абразивами: в горнодобывающих, дорожных, строительных, сельскохозяйственных и других машинах. Износ приводит к повышению динамических нагрузок и усилению шума, к ослаблению зубьев и в конечном счете к их поломке.

Заедание зубьев происходит из-за местного молекулярного сцепления. Разрушение контактирующих поверхностей осуществляется с вырыванием частиц какой-либо поверхности.

Пластическое течение поверхностных слоев материала происходит под действием сил трения в тяжело нагруженных тихоходных передачах при низкой поверхностной твердости. Причинами могут быть шлифовочные прижоги, обезуглероживание поверхностных слоев.

Повреждения торцов зубьев силовых зубчатых колес чаще всего наблюдаются в токарно-винторезных, револьверных, карусельных и некоторых сверлильных станках. Причинами являются частые переключения колес в коробках скоростей и подач.

Расчет зубьев цилиндрических прямозубых передач на контактную прочность сводится к определению контактных напряжений, которые не должны превышать допускаемые:

$$\sigma_H = [\sigma]_H.$$

Контактное напряжение в полосе зацепления σ_H , МПа, определяется (ГОСТ 21354—87) по формуле

$$\sigma_H = Z_E Z_H Z_\varepsilon \sqrt{\frac{F_{\text{сжр}}}{b_w d_w} \frac{u+1}{u}} K_H.$$

Здесь Z_E — коэффициент, учитывающий механические свойства материалов сопряженных зубчатых колес; Z_H — коэффициент, учитывающий форму сопряженных поверхностей зубьев в полюсе зацепления; Z_ϵ — коэффициент, учитывающий суммарную длину контактных линий; u — передаточное число, равное отношению числа зубьев колеса к числу зубьев шестерни; b_w — рабочая ширина на делительном цилиндре, $b_w = \psi_w d_1$; $d_w = d_1$ (для некорригированных колес равен диаметру делительной окружности шестерни).

Коэффициент нагрузки $K_H = K_A K_{H\beta} K_{H\alpha}$, причем составляющие его коэффициенты учитывают K_A — внешнюю динамическую нагрузку, не учтенную в циклограмме нагружения; $K_{H\beta}$ — внутреннюю динамическую нагрузку; $K_{H\alpha}$ — неравномерность распределения нагрузки по длине контактных линий; $K_{H\alpha}$ — распределение нагрузки между зубьями.

Значения коэффициентов определяются либо графически, либо по формулам, которые приводятся в ГОСТ 21354—87.

Окружающая сила $F_{окр}$, Н, определяется по формуле $F_{окр} = M_{кр}/(d_1/2)$; если крутящий момент имеет размерность ньютон на метр (Н·м), а делительный диаметр — миллиметр (мм), то

$$F_{окр} = \frac{2\,000 M_{кр}}{d_1}.$$

Таким образом, контактное напряжение в полюсе зацепления σ_H , МПа, определится следующим образом:

$$\sigma_H = Z_E Z_H Z_\epsilon \sqrt{\frac{2\,000 M_{кр}}{\psi_w d_1^3} \frac{u+1}{u} K_H}.$$

Допускаемое контактное напряжение $[\sigma]_H$, МПа, рассчитывается по формуле

$$[\sigma]_H = (\sigma_R Z_N Z_L Z_R Z_v Z_w Z_X) / n_H,$$

где σ_R — предел контактной выносливости поверхностей зубьев, соответствующий базовому числу циклов напряжений; коэффициенты учитывают Z_N — долговечность; Z_L — влияние смазки; Z_R — шероховатость сопряженных поверхностей (принимается для того из зубчатых колес, зубья которого имеют более грубые поверхности); Z_v — влияние окружной скорости (для $v \leq 5$ м/с $Z_v = 1$); Z_w — влияние перепада твердостей материалов сопряженных поверхностей зубьев; Z_X — размер зубчатого колеса. Значения коэффициентов в каждом конкретном случае принимаются в соответствии с рекомендациями ГОСТ 21354—87.

Предел контактной выносливости зависит от материала зубчатых колес, твердости и вида термической обработки, например, для углеродистых и легированных сталей с твердостью поверхностей зубьев до 350 HB (термическая обработка — улучшение, нормализация) $\sigma_R = 2 \text{ HB} + 70 \text{ МПа}$; для тех же сталей с поверхностной закалкой и твердостью поверхностей зубьев 40...56 HRC $\sigma_R = 17 \text{ HRC} + 200 \text{ МПа}$.

Коэффициент безопасности n_H для зубчатых колес с объемно-упрочненными зубьями принимают равным 1,1; для зубчатых колес с поверхностным упрочнением зубьев $n_H = 1,2$; для передач, выход из строя которых связан с тяжелыми последствиями, $n_H = 1,25 \dots 1,35$.

При проверочных расчетах

$$\sigma_H = Z_E Z_H Z_\epsilon \sqrt{\frac{2000 M_{кр}}{\psi_w d_1^3} \frac{u+1}{u}} K_H \leq [\sigma]_H.$$

При проектных расчетах, когда необходимо определить модуль, подставляют $d_1 = m z_1$, $M_{кр} = 9550N/\eta$ (мощность N измеряется в киловаттах (кВт), а η — в минутах в минус первой степени (мин^{-1})). После чего приравнивают контактное напряжение σ_H допускаемому $[\sigma]_H$ и из этого уравнения определяют модуль m , мм:

$$m \geq \frac{267}{z_1} \sqrt[3]{\frac{N(Z_E Z_H E_\epsilon)^2}{n \psi_w [\sigma]_H^2} \frac{u+1}{u}} K_H.$$

При расчете зубчатых передач, например коробок скоростей металлорежущих станков, в которых валы вращаются с различными угловыми скоростями, в расчет необходимо принимать наименьшую частоту вращения зубчатого колеса, так как при этом модуль будет получаться больше.

Расчет зубьев цилиндрических прямозубых колес на прочность при изгибе

В процессе зацепления зубчатых колес точка приложения силы взаимодействия между зубьями перемещается по эвольвенте. Принимаем допущение, что сила трения пренебрежимо мала. Тогда силу взаимодействия F_d можно считать направленной по нормали к профилям (рис. 3.50), т. е. действующей по линии зацепления NN .

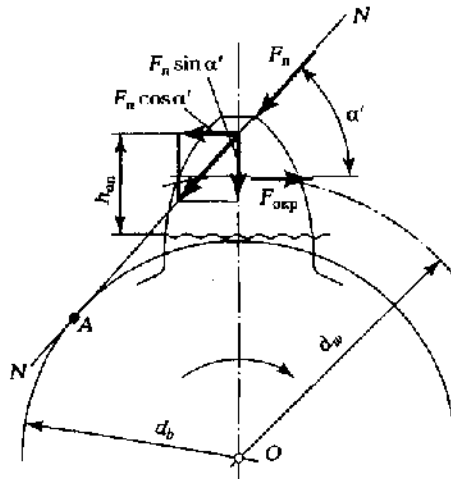


Рис. 3.50

К ведущему зубчатому колесу приложены два момента: от окружной силы $F_{окр}$

$$M_{кр} = F_{окр}(d_w/2),$$

где d_w — диаметр начальной окружности, и момент сопротивления от силы воздействия ведомого колеса F_n

$$M_{сопр} = F_n(d_b/2),$$

где d_b — диаметр основной окружности.

Поскольку зубчатые колеса вращаются равномерно, то сумма моментов сил относительно оси вращения O должна быть равна нулю:

$$F_{окр}(d_w/2) = F_n(d_b/2),$$

а так как $d_b = d_w \cos \alpha_w$, то $F_{окр} = F_n \cos \alpha_w$, а следовательно, сила взаимодействия зубьев в пределах однопарного зацепления при передаче постоянного момента остается постоянной $F_n = F_{окр} / \cos \alpha_w$.

Чтобы выяснить, как действует сила F_n на зуб колеса, разложим ее на две составляющие. Радиальная составляющая, равная $F_n \sin \alpha'$, сжимает зуб, а перпендикулярная к ней составляющая, равная

$F_n \cos \alpha'$, изгибает его. Здесь угол α' фактически больше, чем угол зацепления α_w .

За расчетную схему принимаем консольную балку. Опасное сечение расположено у корня зуба на расстоянии $h_{оп}$ от точки приложения силы $F_n \cos \alpha'$ (так как это сечение расположено в зоне наибольшей концентрации напряжений). Изгибающий момент от силы $F_n \cos \alpha'$ будет равен $(F_n \cos \alpha') h_{оп}$. На растянутой стороне балки (зуба) возникают усталостные трещины, так как имеет место отпущенное напряжение (напряжение падает до нуля, когда зуб выходит из зацепления). Запишем суммарное номинальное напряжение в опасном сечении (с учетом изгиба и сжатия)

$$\sigma_{ном} = \frac{(F_n \cos \alpha') h_{оп}}{W_{х оп}} - \frac{F_n \sin \alpha'}{S_{оп}}.$$

Осевой момент сопротивления опасного сечения $W_{х оп} = (b \delta_{оп}^2)/6$, а площадь опасного сечения $S_{оп} = b \delta_{оп}$, где b — ширина венца; $\delta_{оп}$ — толщина зуба в опасном сечении.

Действием сжимающей силы можно пренебречь, так как она мало влияет на напряжение. Поэтому производят расчет зубьев на выносливость при изгибе. Чтобы не произошло усталостного разрушения зубьев, необходимо выполнять условие $\sigma_F \leq [\sigma]_и$, где $[\sigma]_и$ — допускаемое напряжение изгиба, а расчетное местное напряжение при изгибе σ_F (т. е. напряжение изгиба в опасном сечении) определяют в соответствии с ГОСТ 21354—87 по формуле

$$\sigma_F = \frac{F_{окр}}{b m_n} K_F Y_F Y_\beta Y_\epsilon,$$

где m_n — нормальный модуль; K_F — коэффициент нагрузки, равный $K_F = K_A K_{Fv} K_{H\beta} K_{H\alpha}$; другие коэффициенты учитывают Y_F — влияние формы зуба и концентрацию напряжений, при коэффициенте смещения режущего инструмента, равном нулю, $Y_F \approx 4$; Y_β — влияние наклона зуба, для прямозубых колес $Y_\beta = 1$; Y_ϵ — влияние перекрытия зубьев, для прямозубых колес $Y_\epsilon = 0,8$; K_A — внешнюю динамическую нагрузку, не учтенную в циклограмме нагружения; K_{Fv} — внутреннюю динамическую нагрузку; $K_{H\beta}$ — неравномерность распределения нагрузки по длине контактных линий; $K_{H\alpha}$ — распределение нагрузки между зубьями.

Как видим, расчет на изгиб ведут по расчетной окружной силе $F_{окр}$, Н, выражение для которой при задании $M_{кр}$, Н·м, и диаметра d , мм, делительной окружности запишется так:

$$F_{\text{окр}} = 2\,000 M_{\text{кр}}/d.$$

При проверочных расчетах необходимо выяснить, выполняется ли условие

$$\sigma_F = \frac{F_{\text{окр}}}{b m_n} K_F Y_F Y_\beta Y_\epsilon \leq [\sigma]_H, \text{ или } \frac{2\,000 M_{\text{кр}}}{b m_n d} K_F Y_F Y_\beta Y_\epsilon \leq [\sigma]_H.$$

При проектировочных расчетах зубчатых передач необходимо определить модуль. В зависимости от того, в каких узлах будут работать зубчатые колеса, их модуль можно выразить по-разному.

При проектировании редукторов в полученную зависимость вместо диаметра делительной окружности подставим $d = 2a_w(u + 1)$, где a_w — межосевое расстояние:

$$\frac{K_F \cdot 2\,000 M_{\text{кр}}(u + 1)}{b m_n \cdot 2a_w} Y_F Y_\beta Y_\epsilon \leq [\sigma]_H$$

и выразим минимальное значение модуля, которое будет удовлетворять условию прочности при изгибе:

$$m_n \geq \frac{K_F M_{\text{кр}}(u + 1)}{b a_w [\sigma]_H} 10^3 Y_F Y_\beta Y_\epsilon.$$

Если материал колес одинаковый, то расчет ведут по меньшему зубчатому колесу, у которого зуб у основания более тонкий.

Обозначив через $K_m = 10^3 Y_F Y_\beta Y_\epsilon$, получим

$$m_n \geq \frac{K_F K_m M_{\text{кр}}(u + 1)}{b a_w [\sigma]_H}.$$

Для прямозубых передач $K_m = 3,4 \cdot 10^3$, для косозубых — $K_m = 2,8 \cdot 10^3$ (b и a_w выражаются в миллиметрах (мм), $[\sigma]_H$ — в ньютонах на миллиметр в квадрате (Н/мм²)).

При проектировании зубчатых передач коробок скоростей и коробок подач, например металлорежущих станков, когда известна кинематика, а следовательно, все передаточные отношения и числа зубьев зубчатых колес, следует иметь в виду, что вал, на котором расположено несколько зубчатых колес, может вращаться с различными угловыми скоростями. При этом передаваемая мощность N почти не меняется (ее падение связано с потерями на трение в

опорах валов и зубчатых зацеплениях]. Поэтому в расчетную формулу определения модуля необходимо ввести не a_w , а мощность и частоту вращения n вала, на котором находятся зубчатые колеса. Подставив $M_{кр} = 9\,550N/n$, $b = \psi_m m$ и $d = mz$ ($M_{кр}$ выражается в ньютонах на метр (Н·м), N — в киловаттах (кВт), n — в минутах в минус первой степени (мин⁻¹), а b и m — в миллиметрах (мм)), получим

$$\frac{K_F K_m \cdot 2 \cdot 9\,550 N}{\psi_m m_n m_n m_n z n} \leq [\sigma]_H,$$

откуда минимальный модуль для прямозубых колес, мм:

$$m \geq 26,73 \sqrt[3]{\frac{K_F K_m N}{\psi_m z n [\sigma]_H}}.$$

Значение ψ_m для прямозубых колес принимают равным 6...10, а для косозубых — 10...25.

Допускаемое напряжение изгиба зубьев $[\sigma]_H$ определяется в зависимости от предела выносливости σ_R :

$$[\sigma]_H = (\sigma_R Y_R Y_Y Y_N) / n_H.$$

Если зубчатая передача работает без реверсов, то будет иметь место отнулевое нагружение, т. е. коэффициент асимметрии цикла $R = 0$. В этом случае за предел выносливости нужно взять $\sigma_R = \sigma_0$. При частых реверсах зуб испытывает симметричное переменное нагружение, поэтому за предел выносливости принимают $\sigma_R = \sigma_{-1}$. Значения σ_0 выбирают по табл. 3.7, а $\sigma_{-1} = \sigma_0 / (1,2 \dots 1,6)$. Коэффициент 1,2 берут для азотированных зубьев, 1,4 — для цементованных и нитроцементованных зубьев, а 1,6 — для всех остальных.

Коэффициент безопасности n_H определяют по следующей зависимости:

$$n_H = n_1 n_2 n_3.$$

Значение n_1 выбирают по табл. 3.7; коэффициент $n_2 = 1,3$ вводят только для литых заготовок; коэффициент $n_3 > 1$ вводят, чтобы учесть работу в условиях, вызывающих коррозию, в условиях высоких температур, а также при тонких ободах колес.

Коэффициент Y_R учитывает шероховатость поверхности и шлифование выкружки. Например, при тонком шлифовании и полировании зубьев $Y_R = 1,1 \dots 1,2$; при черновом шлифовании после цемен-

Таблица 3.7. Пределы выносливости σ_0 и коэффициенты безопасности n_1 для зубьев стальных зубчатых колес [8]

Термическая обработка	Твердость зубьев		Марки сталей	σ_0 , МПа	Значение n_1 при вероятности неразрушения	
	по поверхности	в сердцевице			98 %	≥99 %
Нормализация, улучшение	180...350 HB		40, 45, 40X, 40X11, 45XЦ, 35XM	1,8 HB	1,75	2,2
Объемная закалка	45...55 HRC		40X, 40XH	500...600*	1,75...1,85*	2,2...2,3
Закалка токами высокой частоты по всему контуру	56...63 HRC 45...55 HRC	27...35 HRC	У6, 40X, 40XH, 35XM	900 650	1,75	2,2
Азотирование	700...950 HV 500...700 HV	25...40 HRC	38X2Ю, 38X2МЮА, 40X, 40XФА	12 HRC (сердцевина) + 300	1,75	2,2
Цементация с автоматическим регулированием процесса	57...62 HRC		Легированные	850...950	1,55	1,95
Цементация				750...800*	1,75	2,2
Нитроцементация с автоматическим регулированием процесса	56...63 HRC	25...40 HRC	25XГМ, 25XГТ, 30XГТ, 35X	1 000 750	1,55 1,55	1,95 1,95
Нитроцементация	56...63 HRC		25XГТ, 30XГТ, 35X	700	1,65...1,75*	2...2,2*

* Большие значения σ_0 и меньшие значения n_1 при предупреждении обезуглероживания, а также для сталей с содержанием Ni > 1%.

тации и закалки $Y_R = 0,65 \dots 0,7$. Значения Y_R приводятся в справочной литературе [8].

Коэффициент Y_y учитывает механическое упрочнение. При обдувке дробью после цементации или нитроцементации с последующей закалкой $Y_y = 1,1 \dots 1,3$.

Масштабный фактор учитывает коэффициент Y_m : при наружном диаметре менее 400 мм и модуле менее 10 мм он равен 1; при наружных диаметрах от 400 до 2 000 мм $Y_m = 1,05 - 0,000125d_a$.

КПД зубчатых передач

Потери мощности в зубчатых передачах складываются из потерь на трение в зацеплении, на разбрызгивание масла, потери мощности в опорах. Общий КПД передачи определяется по формуле

$$\eta = 1 - (\psi_3 + \psi_p + \psi_n),$$

где ψ_3 , ψ_p , ψ_n — относительные потери в зацеплении, на разбрызгивание масла и в подшипниках. Средние значения КПД зубчатых передач на подшипниках качения приведены в табл. 3.8.

Таблица 3.8. Средние значения КПД зубчатых передач на подшипниках качения

Конструкция	Передача	
	цилиндрическая	коническая
Закрытая с жидкой смазкой	0,97 ... 0,98	0,96 ... 0,97
Открытая с пластической смазкой	0,95	0,94

Конические прямозубые передачи

Конические зубчатые колеса применяют в передачах движения между валами, оси которых пересекаются под углом, в основном под 90° . Прямозубые конические колеса используют при невысоких окружных скоростях (до $2 \dots 3$ м/с). При более высоких скоростях применяют конические колеса с крутовым зубом.

Основные параметры конических прямозубых колес при межосевом угле 90° (рис. 3.51) приведены в табл. 3.9.

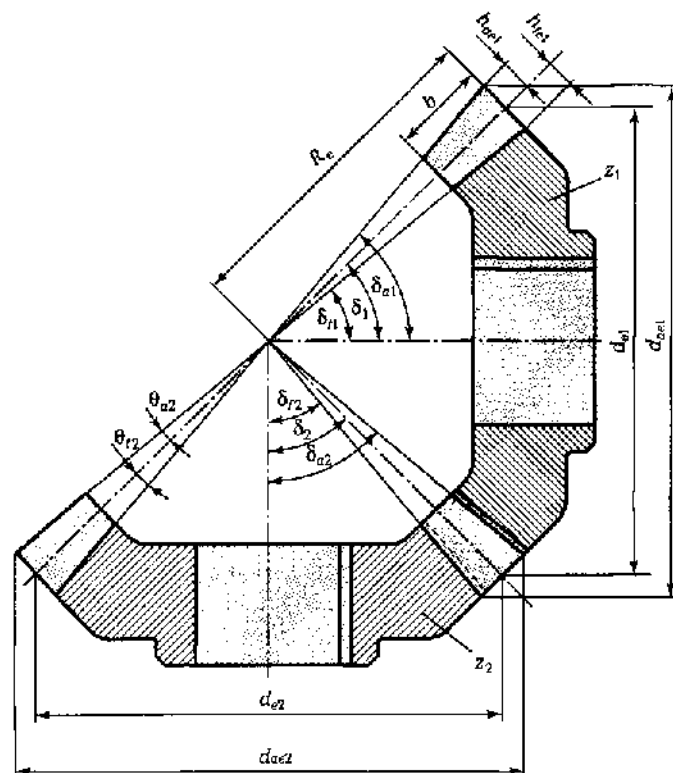


Рис. 3.51

Таблица 3.9. Основные параметры конических прямозубых колес при межосевом угле 90° , выполненных по основной форме (форме I), для $m_e > 1$ мм

Параметры зацепления	Формула
Внешний окружной модуль	m_e
Число зубьев плоского производящего колеса	$z_c = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$
Внешнее конусное расстояние	$R_c = 0,5m_e z_c$
Наибольшая высота зубьев (у торца)	$h_r = 2,2m_e$
Наибольшая высота головки зубьев (у торца)	$h_{ae1} = m_e; h_{ae2} \approx m_e$
Наибольшая высота ножки зубьев (у торца)	$h_{fc1} = h_r - h_{ae1}; h_{fc2} = h_r - h_{ae2}$

Параметры зацепления	Формула
Угол ножки зуба	$\operatorname{tg} \theta_{f1} = h_{fe1}/R_e; \operatorname{tg} \theta_{f2} = h_{fe2}/R_e$
Угол делительного конуса	$\operatorname{tg} \delta_1 = z_1/z_2; \delta_2 = 90^\circ - \delta_1$
Угол конуса вершин	$\delta_{a1} = \delta_1 + \theta_{a1}; \delta_{a2} = \delta_2 + \theta_{a2}$
Угол конуса впадин	$\delta_{f1} = \delta_1 - \theta_{f1}; \delta_{f2} = \delta_2 - \theta_{f2}$
Внешние делительные диаметры	$d_{e1} = m_e z_1; d_{e2} = m_e z_2$
Диаметры вершин зубьев	$d_{ae1} = d_{e1} + 2h_{ae1} \cos \delta_1;$ $d_{ae2} = d_{e2} + 2h_{ae2} \cos \delta_2$

Силы, действующие на валы и оси от прямозубых колес

Выбираем систему координат с началом в полюсе зацепления на середине ширины зубчатых колес; ось x направлена вдоль окружной скорости, ось y — перпендикулярно оси колеса, а ось z — вдоль оси колеса (рис. 3.52).

Окружная сила, действующая вдоль оси x , определяется в зависимости от крутящего момента:

$$F_{\text{окр}} = 2M_{\text{кр}}/d_w.$$

Нормальная к поверхности зуба сила F действует в плоскости xy (по нормали к оси вала):

$$F = F_{\text{окр}}/\cos \alpha_w.$$

Для некорригированных колес $\alpha_w = \alpha$. Вычислим проекции силы F на оси координат:

$$F_x = F_{\text{окр}}; F_y = F_{\text{окр}} \operatorname{tg} \alpha; F_z = 0.$$

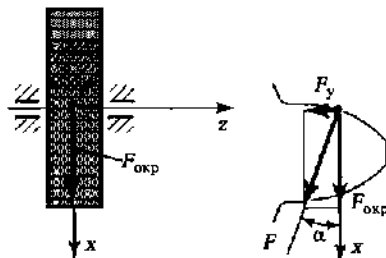


Рис. 3.52

Цилиндрическая передача Новикова

Эвольвентные зубчатые передачи получили в технике большое распространение. Однако они имеют недостатки: повышенную чувствительность к перекосам, потери на трение в связи со значительным скольжением. Эти недостатки уменьшены в зацеплении, предложенном М. А. Новиковым.

В этом зацеплении (рис. 3.53) точка контакта зубьев перемещается не по профилю, как в прямозубом эвольвентном зацеплении, а вдоль зуба; при этом скорость перемещения и угол давления остаются постоянными. Линия зацепления расположена параллельно оси колес, а не в плоскости вращения.

В передаче Новикова торцовый коэффициент перекрытия равен нулю, следовательно, колеса обязательно должны иметь не прямые зубья. Постоянство мгновенного передаточного числа достигается благодаря тому, что зубья делают винтовыми и осевой коэффициент перекрытия выбирают большие единицы. Боковые рабочие поверхности зубьев представляют собой крутовинтовые поверхности. Применяют передачи Новикова чаще всего с одной линией зацепления, в которых профиль зубьев малого колеса (см. рис. 3.53) делают выпуклым, а у большого — вогнутым. Если ведущим является зубчатое колесо с выпуклым профилем зубьев, то передачу называют заполусной, так как точка контакта расположена за полюсом. Если ведущим является колесо с вогнутым профилем зубьев, то передача дополусная. Выпуклый профиль зуба располагается вне начальной окружности, что позволяет изготовить шестерню вместе с валом без врезания ее зубьев в вал со значительно меньшим числом зубьев по сравнению с шестерней с эвольвентным профилем зуба.

Передачи Новикова с двумя линиями зацепления применяют при $v \leq 20$ м/с (преимущественно до 12,5 м/с) для колес с твердостью зубьев до 320 НВ и модулем до 16 мм.

Передачи Новикова с двумя линиями зацепления обладают большей несущей способностью, менее чувствительны к смещению осей, работают с меньшим шумом и более технологичны. Особенно они эффективны, когда число зубьев очень мало (меньше 10).

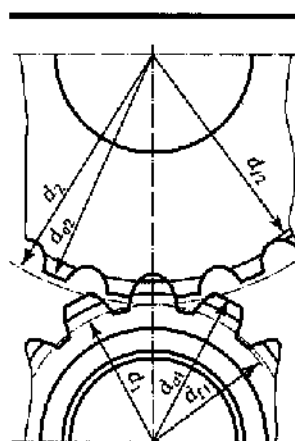


Рис. 3.53

Переход на передачу Новикова в редукторах иногда осуществляют вместо перехода на колеса с твердыми поверхностями. Однако для коробок скоростей станков передачи Новикова не применяются из-за большей ширины и больших деформаций валов.

Планетарные зубчатые передачи

Планетарными называются передачи, в которых оси зубчатых колес перемещаются в пространстве. Планетарные передачи применяют: 1) при необходимости получить очень большие передаточные отношения, 2) при сложении движений (в качестве суммирующих механизмов в кинематических цепях станков, в дифференциалах автомобилей), 3) для регулирования скорости (многоступенчатые планетарные коробки скоростей).

Основным достоинством планетарных передач являются малые габаритные размеры, менее шумная работа. Но планетарные передачи требуют повышенной точности изготовления, и они сложнее в сборке. КПД планетарных передач колеблется в пределах 0,7 ... 0,99 (в зависимости от значения передаточного отношения).

3.15. ЧЕРВЯЧНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Червячная передача (рис. 3.54) состоит из **червяка**, т. е. винта с трапецеидальной резьбой, и зубчатого (червячного) колеса.

Основные элементы червячного колеса такие же, как цилиндрического зубчатого колеса. Отличие состоит в том, что у червячного колеса начальный контакт происходит не в точке, а по линии. Зубья червячных колес имеют дуговую форму, получаемую в результате взаимного огибания витков червяка. Ось червячного колеса перпендикулярна оси червяка, поэтому червячные передачи имеют характерные черты зубчатых и винтовых передач. Изобретение червячных передач приписывают Архимеду.

Применяют червяки следующих типов: архимедовы, конволютные, эвольвентные и др.

Архимедовы червяки представляют собой винты с резьбой, имеющей прямолинейный трапецеидальный профиль в осевом сечении. В торцовом сечении витки очерчены архимедовой спиралью.

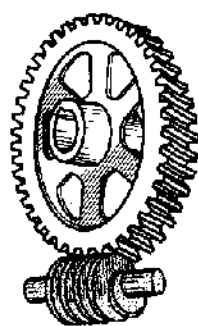


Рис. 3.54

У **конволютных** червяков в нормальном сечении профиль впадины прямолинейный. В торцовом сечении витки очерчены эвольвентой (удлиненной или укороченной). По сравнению с архимедовым червяком конволютный имеет технологическое преимущество: при нарезании витковой линии червяка по профилю канавки резец имеет одинаковые углы резания.

Эвольвентные червяки представляют собой косозубое колесо с малым числом зубьев и очень большим углом их наклона.

Геометрические параметры червячных передач

В червячных передачах стандартизованы осевые модули m зацепления. Стандартный угол профиля 20° .

Червяк. Делительный диаметр червяка (рис. 3.55) $d_1 = qm$, где q — коэффициент диаметра червяка — стандартизован. Существует основной ряд q : 8; 10; 12,5; 16; 20 и 25; дополнительный ряд: 7,1; 9; 11,2; 14; 18; 22,4. Кроме того, допускается принимать q : 7, 11 и 12. Для быстроходных передач принимают меньшие значения q во избежание больших окружных скоростей, а большие — в передачах с большим передаточным отношением (а следовательно, и большими расстояниями между опорами червяка), чтобы обеспечить достаточную жесткость. В редукторах рекомендуют выбирать $d_1 = 0,4a_w$, где a_w — расстояние между осями червяка и червячного колеса.

Начальный диаметр d_w червяка для некорригированной передачи равен делительному диаметру d_1 .

Червячная передача позволяет получать очень малые передаточные отношения (например, 1 : 400, 1 : 500, в приводах столов большого диаметра станков встречаются 1 : 1 000).

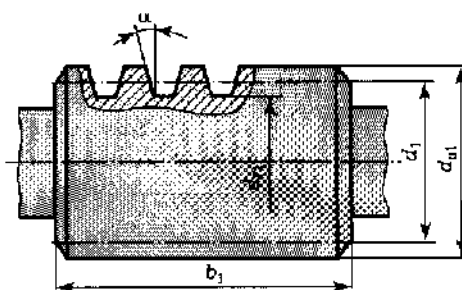


Рис. 3.55

Передаточные отношения червячной передачи рассчитывают по формуле $i = k/z$, где k — число заходов червяка; z — число зубьев червячного колеса.

Число заходов червяка выбирают обычно $k = 1; 2$ и 4 . Мощные передачи не выполняют однозаходными из-за малого КПД и сильного нагрева. Например, в тяжелых продольно-строгальных станках используют червяк с числом заходов $k = 10$.

Угол подъема витков червяка с модулем m

$$\operatorname{tg} \gamma = Ph/(\pi d_1) = (Pk)/(\pi d_1) = (km)/d_1 = k/q,$$

где $Ph = Pk$ — ход резьбы (винтовой линии витков с шагом $P = \pi m$) червяка.

Высота головки h_{a1} и ножки h_{f1} витков:

$$h_{a1} = m; h_{f1} = h_{f1}^* m,$$

где коэффициент высоты ножки зуба h_{f1}^* для архимедовых и конволютичных червяков равен $1,2$, а для эвольвентных $h_{f1}^* = (2,2 \cos \gamma) - 1$.

Диаметр вершин d_{a1} (внешний диаметр) и диаметр впадин d_{f1} :

$$d_{a1} = d_1 + 2h_{a1} \text{ и } d_{f1} = d_1 - 2h_{f1}.$$

Длину b_1 нарезанной части червяка выбирают тем большей, чем больше число зубьев червячного колеса z , т. е.

$$b_1 \leq (c_1 + c_2 z)m;$$

при $k = 1$ и $k = 2$ $c_1 = 11$, $c_2 = 0,06$; при $k = 4$ $c_1 = 12,5$, $c_2 = 0,09$.

Для шлифуемых червяков (для выхода шлифовального круга) величину b_1 увеличивают примерно на $3m$, чтобы поверхность боковых поверхностей рабочей части червяка не была испорчена.

Червячное колесо. Минимальное число зубьев червячных колес во вспомогательных кинематических цепях при однозаходных червяках принимают равными $17 - 18$, в силовых передачах $26 - 28$. Оптимальное число зубьев червячного колеса в силовых передачах считается равным $32 - 63$ (не более 80). В приводах столов большого диаметра z доходит до $200 - 300$, а в отдельных случаях до $1\,000$.

Делительный и совпадающий с ним начальный диаметр (рис. 3.56)

$$d = mz.$$

Средний диаметр вершин d_{a2} и диаметр впадин d_{f2} :

$$d_{a2} = d_2 + 2h_{a2}; d_{f2} = d_2 - 2h_{f2}.$$

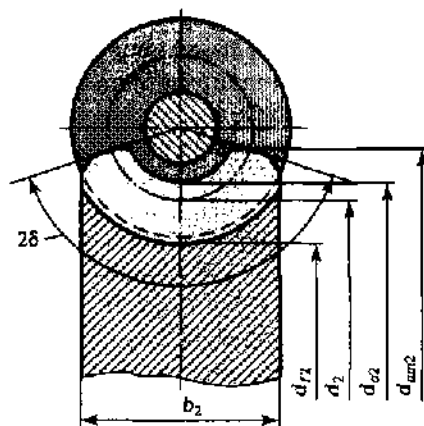


Рис. 3.56

Ширину колеса (см. рис. 3.56) выбирают в зависимости от диаметра окружности вершин червяка: при $k = 1$ и $k = 2$ $b_2 \leq 0,75d_{a1}$; при $k = 4$ $b_2 \leq 0,67d_{a1}$.

Условный угол обхвата 2δ (см. рис. 3.56) для расчета на прочность находится по следующей зависимости:

$$\sin \delta = b_2 / (d_{a1} - 0,5m).$$

Межосевое расстояние передачи определяют по формуле

$$a_w = (d_1 + d_2) / 2 = 0,5m(q + z).$$

В червячных передачах необходимо предусматривать возможность регулирования при сборке положения червячного колеса вдоль его оси для совмещения с осевой плоскостью червяка.

Достоинствами червячной передачи являются компактность, бесшумность, плавность хода, возможность большого редуцирования; недостатком — низкий коэффициент полезного действия.

Червячные передачи широко применяются в подъемно-транспортных машинах, металлорежущих станках, автомобилях.

Материалы червячной пары выбирают с учетом особенностей ее работы. По сравнению с зубчатыми червячные передачи имеют большие скорости скольжения в контактной зоне и неблагоприятные условия для гидродинамической смазки. Для уменьшения износа обычно червячное колесо выполняют из антифрикционного материала (относительно мягкого), а червяк — из твердых матери-

алов. В силовых передачах используют червяки из сталей, термически обработанных до значительной твердости. Наилучшую износостойкость передач обеспечивают червяки из цементованных сталей 20Х, 12ХНЗА, 18ХГТ, 15ХФ, имеющие твердость после закалки 56...63 HRC. Широко применяют червяки из среднеуглеродистых сталей 45, 40Х, 40ХН, 35ХГСА с поверхностной или объемной закалкой до твердости 45...55 HRC, с последующим шлифованием и полированием. Для изготовления червяков применяют также азотируемые стали 38Х2МЮА, 38Х2Ю и другие, требующие только полирования.

Для передач с колесами очень больших диаметров целесообразно применять бронзовые червяки, при этом червячные колеса выполняют из чугуна.

При высоких скоростях скольжения (от 5 до 25 м/с) и длительной работе без перерыва венцы у червячного колеса выполняют из оловянной бронзы БрО10Ф1, оловянно-никелевой бронзы БрО10Н1Ф1, а также сурьмяно-никелевой бронзы.

Для тихоходных передач применяют алюминиево-железистые бронзы БрА9Ж4А. При этом червяк должен обязательно иметь высокую твердость, не ниже 45 HRC.

Причины разрушения червячных передач

Как отмечалось ранее, характерными особенностями работы червячных передач являются большие скорости скольжения и плохие условия для гидродинамической смазки. В средней части по длине зуба червячного колеса имеется зона, в которой скольжение происходит вдоль контактной линии. Поэтому основными причинами выхода из строя червячных передач являются поверхностные разрушения, схватывание и изнашивание зубьев. Схватывание особенно опасно, если червячные колеса изготовлены из твердых бронз и чугуна, так как вырванные с их поверхности частицы (и приварившиеся к червяку) интенсивно начинают изнашивать колеса. При использовании мягких материалов колес схватывание наблюдается в менее опасной форме: материал колеса (бронза) «намазывается» на червяк.

Усталостное выкрашивание наблюдается в передачах с колесами из стойких против заедания бронз, при этом выкрашивание наблюдается только у колеса.

При неточном монтаже передачи наблюдается интенсивное изнашивание, которое усиливается при загрязнении, неправиль-

ном выборе смазки, при повышенной шероховатости червяка, а также при частых пусках и остановах. В результате возможны изломы зубьев червячного колеса.

Расчеты на прочность

Червячные передачи рассчитывают на прочность по напряжениям изгиба и по контактным напряжениям. В большинстве случаев условия прочности при изгибе не определяют размеры передачи, поэтому этот расчет используют в качестве проверочного. В основном проводят расчет архимедовых червяков, который можно распространить и на другие цилиндрические червяки.

Ширина колеса по дуге окружности выражается через диаметр d_1 начального цилиндра червяка и условный угол обхвата 2δ (см. рис. 3.56) в градусах:

$$b = \pi d_1 (2\delta / 360^\circ).$$

Длина контактных линий

$$l_1 = \frac{0,75 b \varepsilon \alpha}{\cos \gamma} = 0,75 \pi d_1 \frac{2\delta}{360^\circ} \frac{\varepsilon \alpha}{\cos \gamma}.$$

Коэффициент 0,75 учитывает уменьшение поля зацепления. Условный угол обхвата обычно назначают равным 100° . Торцовый коэффициент перекрытия в средней плоскости червячного колеса $\varepsilon \alpha = 1,8 \dots 2,2$. В среднем длина контактных линий

$$l_1 = \frac{1,3 d_1}{\cos \gamma}.$$

Тангенциальная q_t и нормальная q_n нагрузки на единицу длины контактных линий:

$$q_t = \frac{F_{\text{окр}}}{l_1 \cos \gamma}; \quad q_n = \frac{q_t}{\cos \alpha_n} \approx \frac{F_{\text{скр}}}{1,3 d_1 \cos \alpha},$$

где $F_{\text{окр}} = (2kM_2)/d_2$ — окружное усилие на колесе; k — коэффициент нагрузки; $\alpha_n \approx \alpha$.

Расчет на изгиб. Витки червяка значительно прочнее, поэтому расчет ведут по колесу. Напряжение изгиба зубьев

Таблица 3.10. Значения коэффициента Y_H в зависимости от эквивалентного числа зубьев

z_v	20	24	26	28	30	32
Y_H	1,98	1,88	1,85	1,80	1,76	1,71

Продолжение табл. 3.10

z_v	35	37	40	45	50	60
Y_H	1,64	1,61	1,55	1,48	1,45	1,40

$$\sigma_H = \frac{Y_H q_1 \cos^2 \gamma}{m_n} = \frac{Y_H q_1 \cos \gamma}{m} = \frac{Y_H F_{\text{окр}} \cos \gamma}{1,3 m^2 q} \leq [\sigma]_H,$$

где m_n и m — нормальный и осевой модули червяка; Y_H — коэффициент прочности зубьев для червячных колес, который выбирают по табл. 3.10 по эквивалентному числу зубьев $z_v = z_2 / \cos^2 \gamma$; $[\sigma]_H$ — допускаемое напряжение изгиба зубьев колеса.

Расчет по контактным напряжениям. За исходную принимают формулу Герца для наибольших контактных напряжений при сжатии двух цилиндров вдоль их образующих:

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{q_n E (1/\rho_1 + 1/\rho_2)},$$

где E — приведенный модуль упругости материалов:

$$E = \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2},$$

а ρ_1 и ρ_2 — радиусы кривизны контактируемых поверхностей. Поскольку в средней плоскости витки архимедова червяка имеют профиль прямобочной рейки, то $\rho_1 = \infty$. С учетом последнего замечания перепишем зависимость для определения контактных напряжений

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{q_n E}{\rho_2}}.$$

В полученную формулу подставим радиус кривизны зуба червячного колеса в полюсе зацепления $\rho_2 = \frac{d_2 \sin \alpha}{2 \cos \gamma}$; $F_{\text{окр}} = \frac{2kM_2}{d_2}$;

$d_2 = mz$; $d_1 = mq$; $m = 2a_w/(z + q)$; $\alpha = 20^\circ$; $E_1 = 2,15 \cdot 10^5$ МПа (Н/мм²); $E_2 = 1 \cdot 10^5$ МПа (для бронзы или чугуна). После преобразований получим формулу для определения контактных напряжений σ_H , МПа:

$$\sigma_H = 54(z/q) \sqrt{\left(\frac{z/q + 1}{a_w}\right)^3} kM_2 \leq [\sigma]_H.$$

При проекторочном расчете червячной передачи межосевое расстояние (из расчета на прочность зубьев червячного колеса) принимается, мм:

$$a_w > 610 \sqrt[3]{M_2/[\sigma]_H^2},$$

где M_2 — вращающий момент, приложенный к червяку, Н·м; $[\sigma]_H$ — допускаемое контактное напряжение, Н/мм².

Выбор допускаемых напряжений

Допускаемое напряжение изгиба. Особенности при выборе допускаемых напряжений для червячных колес связаны с тем, что червячные колеса имеют небольшую частоту вращения, а следовательно, и малые эквивалентные числа циклов нагружения. Поэтому за исходные выбирают номинальные допускаемые напряжения $[\sigma]_{H0}$:

$$[\sigma]_{H0} = 0,25\sigma_{т.р} + 0,08\sigma_{в.р},$$

где $\sigma_{т.р}$ и $\sigma_{в.р}$ — соответственно предел текучести при растяжении и временное сопротивление разрыву. Для бронзы БрО10Ф1 при отливке в песок $\sigma_{т.р} = 120$ МПа, а $\sigma_{в.р} = 200$ МПа, при отливке в кокиль соответственно 150 и 260 МПа.

Допускаемое напряжение изгиба вычисляют по исходному номинальному при помощи множителя $\sqrt[3]{10^6/N_E}$, который учитывает понижение сопротивления усталости материала с ростом циклов нагружения. Для бронзовых червячных колес при работе зубьев одной стороной (т. е. при неревверсивной передаче) допускаемое напряжение определяется следующим образом:

$$[\sigma]_H = [\sigma]_{H0} \sqrt[3]{10^6/N_E},$$

где N_E — эквивалентное число циклов, определяемое по формуле

$$N_E = 60 \sum \left(\frac{M_{i\text{кр}}}{M_{\text{max}}} \right)^9 n_i t_i.$$

Здесь n_i — частота вращения, мин^{-1} ; t_i — время, ч; $M_{i\text{кр}}$ — крутящий момент на колесе, действующий на него в течение времени t_i ; M_{max} — максимальный длительно действующий момент, по которому ведется расчет.

Допускаемое напряжение при работе зубьев обеими сторонами (при реверсивной передаче)

$$[\sigma]_{-1\text{в}} = [\sigma]_{-1\text{нб}} \sqrt[9]{10^6 / N_E}.$$

где $[\sigma]_{-1\text{нб}} = 0,1 \sigma_{\text{в.р.}}$.

Допускаемое контактное напряжение определяют по следующей зависимости:

$$[\sigma]_H = K_{HL} C_v [\sigma]_{H0}.$$

Допускаемое контактное напряжение $[\sigma]_{H0}$, соответствующее пределу контактной выносливости при числе циклов перемены напряжений 10^7 , принимается для оловянных бронз (при скорости скольжения $v_{\text{ск}} = 5 \dots 25$ м/с) $[\sigma]_{H0} = (0,75 \dots 0,9) \sigma_{\text{в}}$; безоловянных бронз и латуней (при $v_{\text{ск}} = 3 \dots 5$ м/с) $[\sigma]_{H0} = (250 \dots 300) - 25 v_{\text{ск}}$; серого чугуна (при $v_{\text{ск}} < 2 \dots 3$ м/с) $[\sigma]_{H0} = (175 \dots 200) - 35 v_{\text{ск}}$.

Коэффициент долговечности $K_{HL} = \sqrt[9]{10^7 / K_{EH} N_E}$, где N_E — эквивалентное число циклов нагружения зубьев червячного колеса за весь срок службы передачи, а коэффициент эквивалентности K_{EH} в зависимости от режима нагружения принимается от 1,0 до 0,034.

Коэффициент, учитывающий изнашиваемость зубьев колеса в зависимости от скорости скольжения $v_{\text{ск}}$, принимается: при $v_{\text{ск}} = 3$ м/с $C_v = 1,11$; при $v_{\text{ск}} = 5$ м/с $C_v = 0,95$; при $v_{\text{ск}} > 8$ м/с $C_v = 0,80$.

Силы, действующие в червячном зацеплении

Рассмотрим силы, действующие в полюсе зацепления (рис. 3.57).

Окружная сила на колесе $F_{2\text{окр}}$ (на червяк действует в осевом направлении):

$$F_{2\text{окр}} = 2M_{2\text{кр}}/d_2.$$

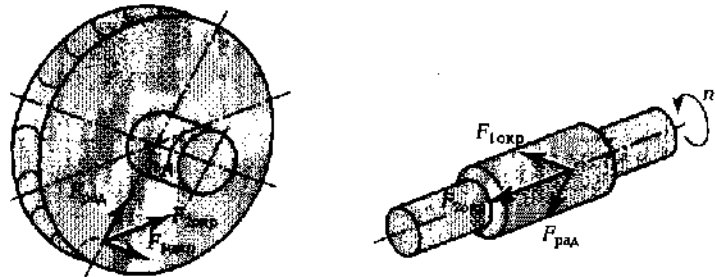


Рис. 3.57

Окружная сила на червяке $F_{\text{окр}}$ (на колесо действует в осевом направлении):

$$F_{\text{окр}} = 2M_{\text{кр}}/d_1.$$

Радиальная сила, раздвигающая червяк и колесо

$$F_{\text{рад}} = F_{\text{окр}} \operatorname{tg} \alpha.$$

КПД червячной передачи

КПД червячного зацепления определяют по следующей зависимости:

$$\eta_{\text{зч}} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg}(\gamma + \varphi)},$$

где γ — угол подъема винтовой линии червяка; φ — угол трения, который зависит от коэффициента трения f :

$$\varphi = \operatorname{arctg} f.$$

КПД червячной передачи растет с увеличением угла подъема γ , который для однозаходных червяков не бывает более 27° . Значения коэффициентов трения и углов трения даны в табл. 3.11.

Для передач со стальным червяком и чугунным колесом значение коэффициента трения увеличивают на 60 %.

Общий КПД червячной передачи

$$\eta = \eta_{\text{зч}} (1 - \Psi_{\text{в}} - \Psi_{\text{с}}),$$

где $\Psi_{\text{в}}$ — потери в подшипниках; $\Psi_{\text{с}}$ — потери энергии на разбрызгивание и размешивание смазки, обычно 0,01, поэтому при предварительных расчетах ими можно пренебречь.

Таблица 3.11. Значения коэффициентов трения f и углов трения φ для стального червяка и колеса из оловянной бронзы

$v_{ср}$, м/с	0,01	0,10	0,25	0,50	1,00	1,50
f	0,10... 0,12	0,08... 0,09	0,06... 0,08	0,05... 0,07	0,04... 0,06	0,04... 0,05
φ	5°40'... 6°50'	4°30'... 5°10'	3°40'... 4°20'	3°10'... 3°40'	2°30'... 3°10'	2°20'... 2°50'

Продолжение табл. 3.10

$v_{ср}$, м/с	2,00	3,00	4,00	7,00	10,00	15,00
f	0,035... 0,045	0,028... 0,035	0,02... 0,03	0,018... 0,026	0,016... 0,024	0,014... 0,02
φ	2°00'... 2°30'	1°30'... 2°00'	1°20'... 1°40'	1°00'... 1°30'	0°55'... 1°20'	0°50'... 1°10'

В червячных передачах на подшипниках качения можно принимать $\eta = \eta_{зеп}$, пренебрегая потерями на трение в опорах.

Тепловой расчет червячных передач

Червячные передачи работают с большим тепловыделением. Нагрев масла выше 95° приводит к потере им защитной способности и к опасности заеданий в передаче.

Количество теплоты, выделяющееся за час, ккал/ч, в непрерывно работающей червячной передаче и передающей мощность N_1 , кВт, определяется зависимостью

$$Q = 860(1 - \eta)N_1.$$

Количество теплоты, отводимое поверхностью корпуса передачи и фундаментной плитой, на которой закреплен корпус, вычисляется по формуле

$$Q_1 = K_T(t - t_0)S(1 + \Psi),$$

где K_T — коэффициент теплоотдачи, равный 10...16 ккал/(м²·°С·ч). Большие значения принимают при благоприятных условиях циркуляции воздуха; t и t_0 — температура масла и окружающей среды соответственно, °С; S — площадь свободной поверхности охлаждения корпуса передачи, включая 50 % поверхности ребер, м²; Ψ — коэффициент, учитывающий отвод тепла через

фундаментную плиту или раму машины, который доходит до 0,3 при прилегании корпуса передачи по большой поверхности.

Максимальное количество теплоты, которое может отводиться корпусом передачи через плиту или раму:

$$Q_{\text{imax}} = K_T ([t]_{\text{max}} - t_o) S (1 + \Psi),$$

где $[t]_{\text{max}}$ — максимально допускаемая температура масла.

По тепловому балансу $Q = Q_1$ можно определить рабочую температуру масла t или мощность N_1 , которая может длительное время передаваться червячной передачей согласно условию, что температура масла не превышает $[t]_{\text{max}}$:

$$t = t_o + \frac{860(1 - \eta)N_1}{K_T S (1 + \Psi)}; N_1 = \frac{K_T ([t]_{\text{max}} - t_o) S (1 + \Psi)}{860(1 - \eta)}.$$

Если $t > [t]_{\text{max}}$, т.е. $Q > Q_{\text{imax}}$, то необходимо отводить избыточную теплоту. Этому способствует использование корпуса с ребрами, если они не были предусмотрены конструкцией ранее. В противном случае необходимы искусственная вентиляция, встраивание змеевиков для охлаждения жидкости в масляной ванне.

Смазка

В целях повышения сопротивления схватыванию применяют вязкие масла (табл. 3.12). Для передач с прерывистой работой, когда температура передачи ниже, рекомендуется применять менее вязкие масла. Для повышения противозадирных свойств к минеральным маслам добавляют растительные или животные жиры (от 3 до 10 %).

Для средних и низких скоростей основным видом смазывания при нижнем расположении червяка является окунание. Масляная ванна должна быть достаточно ёмкой во избежание быстрого старения масла и взбалтывания осадка. Уровень масла в этом случае устанавливается по центру нижнего тела качения подшипников червяка, причем червяк должен быть погружен в масло на глубину, близкую к высоте витка.

Если червяк не окунается в масло, то на него устанавливают маслоразбрызгивающие кольца, которые наносят масло на червячное колесо.

В редукторах с верхним расположением червяка уровень масла при небольших и средних скоростях не имеет существенного

Таблица 3.12. Рекомендуемая вязкость масла для червячных передач

Скорость скольжения $v_{ск}$, м/с	0...1*	0...2,5*	0...5**	5...10	15...25	Свыше 25
Кинематическая вязкость масла, сСт: при 50 °С при 100 °С	450 55	300 35	180 20	120 12	60 —	45 —
Способ смазывания	Окунанием			Струйный или окунанием	Струйный под избыточным давлением, МПа	
					0,2	0,3

* Тяжелые условия работы.

** Средние условия работы.

значения. В быстроходных передачах этого типа применяют циркуляционную смазку (масло от насоса подается через трубочки непосредственно в зону зацепления).

3.16. ЦЕПНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Общие сведения

Цепные передачи, как и ременные, применяются для передач вращения между валами, удаленными друг от друга. Цепная передача состоит (рис. 3.58) из ведущей 1 и ведомой 2 звездочек и цепи 3, охватывающей и входящей с ними в зацепление. Кроме перечис-

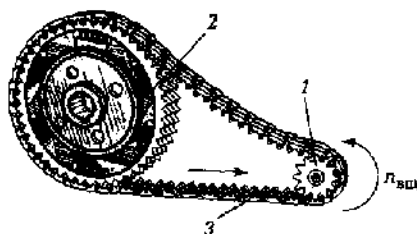


Рис. 3.58

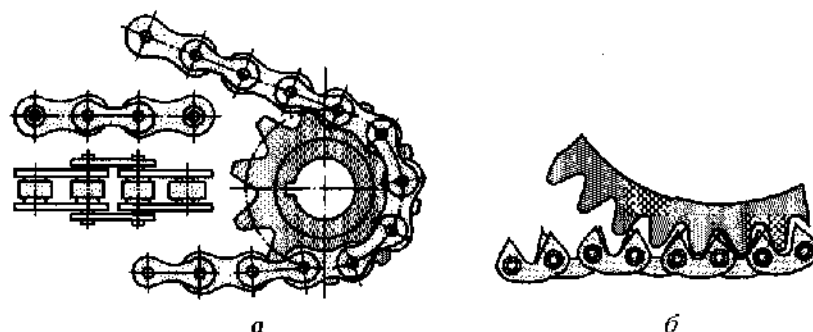


Рис. 3.59

ленных основных элементов цепные передачи включают в себя натяжные и смазочные устройства.

Цепные передачи широко применяются в транспортных (мотоциклах, велосипедах, автомобилях, транспортерах) и сельскохозяйственных машинах, металлорежущих станках. Для цепных передач станков используют цепи двух конструкций: втулочно-роlikовые (рис. 3.59, а) и бесшумные (рис. 3.59, б); последние рекомендуются для передачи больших крутящих моментов.

Достоинствами цепных передач являются возможность передавать движение на удаленные друг от друга валы; меньшие, чем у ременных передач, габаритные размеры; высокий КПД; возможность передавать вращение нескольким звездочкам одной цепью; малые силы, действующие на валы, так как отсутствуют первоначальные натяжные устройства; отсутствие скольжения; возможность легкой замены цепи.

Недостатками являются повышенное изнашивание (работают в условиях отсутствия жидкостного трения); цепи вытягиваются вследствие изнашивания шарниров. поэтому в процессе эксплуатации приходится применять натяжные устройства; при небольшом числе зубьев звездочки скорость вращения приводной звездочки и цепи неравномерна.

Передаточное отношение будет определяться, как и для зубчатой передачи, формулой

$$i = \frac{z_1}{z_2},$$

где z_1 — число зубьев ведущей звездочки; z_2 — число зубьев ведомой звездочки.

Величина, обратная передаточному отношению, называется **передаточным числом**

$$u = 1/i.$$

Передаточное число ограничивается допустимыми габаритными размерами, углами обхвата и числом зубьев звездочек; обычно оно бывает меньше 7. В отдельных случаях, если позволяют габаритные размеры, в тихоходных передачах допускается увеличивать передаточное число до 10.

Число зубьев звездочек

Минимальное число зубьев ограничивается износом шарниров, динамическими нагрузками и шумом передач. Чем меньше число зубьев звездочки, тем больше износ, так как угол поворота звена цепи при набегании на звездочку и сбегании с нее равен $360^\circ/z$.

С уменьшением числа зубьев возрастает неравномерность скорости движения цепи и скорость удара цепи о звездочку. Минимальное число зубьев звездочки в силовых передачах роликовыми цепями следующее: при максимальных частотах вращения $n_{\text{max}} = 19 \dots 23$; при средних — $17 \dots 19$ и при низких $13 \dots 15$. Максимальное число зубьев звездочек для роликовых цепей выбирают равным $100 \dots 120$, а для зубчатых $120 \dots 140$.

Минимальное межосевое расстояние определяют из условия, что угол обхвата цепью малой звездочки должен быть не меньше 120° :

$$\begin{aligned} \text{при } u \leq 3 \quad A_{\text{min}} &= \frac{D_1 + D_2}{2} + (30 \dots 50); \\ \text{при } u > 3 \quad A_{\text{min}} &= \frac{D_1 + D_2}{2} \frac{9 + u}{10}, \end{aligned}$$

где D_1 и D_2 — наружные диаметры звездочек.

Оптимальное межосевое расстояние $A = (30 \dots 50)t$, где t — шаг цепи.

Максимальное расстояние между осями звездочек не должно превышать $80t$.

Шаг цепи (расстояние между ее звеньями) является основным параметром цепной передачи; обычно $A/80 \leq t \leq A/25$.

По предварительно выбранному расстоянию A , шагу t и числу зубьев звездочек определяют требуемое число звеньев цепи W :

$$W = \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{2A}{t} + \frac{(z_2 - z_1)^2}{2\pi} \frac{t}{A}.$$

Следует отметить, что эта формула является приближенной.

Расстояние между осями звездочек по выбранному числу звеньев цепи (без учета провисания)

$$A = \frac{t}{4} \left[W - \frac{z_1 + z_2}{2} + \sqrt{W - \frac{(z_1 + z_2)^2}{2} - 8 \frac{(z_2 - z_1)^2}{2\pi}} \right].$$

Критерии работоспособности

Цепные передачи выходят из строя по следующим причинам.

1. Изнашивание шарниров, приводящее к удлинению цепи и неправильному зацеплению ее со звездочками. Это основная причина потери работоспособности для большинства цепей. Допустимое удлинение цепи 1,5...2,5 %.

2. Усталостное разрушение пластин по проушинам. Это основная причина для быстроходных тяжело нагруженных роликовых цепей, работающих в закрытых передачах с хорошей смазкой.

3. Проворачивание осей и втулок в пластинах в местах запрессовки. Выход из строя цепей по этой причине связан с недостаточно высоким качеством изготовления.

4. Выкрашивание и раскалывание роликов.

5. Изнашивание зубьев звездочек.

В качестве основного расчета цепных передач принимается расчет на износостойкость шарниров. Для увеличения износостойкости шарниров роликовых цепей при работе без смазки или со скудной смазкой применяют пластмассы.

Ресурс цепей в стационарных машинах должен составлять не менее 3...5 тыс. ч работы.

Материалы цепей

Пластины выполняют из холоднокатаной ленты, изготавливаемой из сталей 45, 50, 40X, 40XH, 30XH3A. В зависимости от назначения пластины закалывают до твердости 40...50 HRC. Детали шарниров — оси, втулки, вкладыши — выполняют преимущественно из цементируемых сталей 15, 20, 15X, 20X, 12XH3, 20XH3A, 20X2H4A, 30XH3A и подвергают закалке до 50...65 HRC.

Эффективно применение газового цианирования рабочих поверхностей шарниров.

Многократного повышения ресурса цепей достигают диффузионным хромированием шарниров. Усталостную прочность пластин роликовых цепей повышают обжатием краев отверстий.

Смазывание

Для ответственных силовых передач применяют непрерывное картерное смазывание:

а) окунание цепи в масляную ванну — глубина погружения цепи в масло в самой высокой точке не должна превышать ширины пластины; во избежание взбалтывания масла применяют до скорости 10 м/с;

б) разбрызгивание специальными разбрызгивающими выступами или отражающими щитками, по которым масло стекает на цепь; применяют при скоростях 6...12 м/с в случаях, когда уровень масла не может быть поднят до высоты расположения цепи;

в) циркуляционное центробежное с подачей масла (через каналы в валах и звездочках) непосредственно на цепь; применяют при малых габаритных размерах передачи, например в транспортных машинах;

д) циркуляционное струйное от насоса; применяют для мощных быстроходных цепных передач;

г) циркуляционное распылением капель масла в струе воздуха под давлением; применяется при скоростях более 12 м/с.

В среднескоростных цепных передачах, не имеющих герметичных картеров, применяют консистентную внутришарнирную смазку, которую нагревают до температуры разжижения перед тем, как окунуть в нее цепь. Периодичность смазывания — через 120...180 ч. Консистентная смазка применяется до скорости 4 м/с, при скоростях до 6 м/с используют капельное смазывание.

При низких скоростях работы цепи смазывание осуществляется вручную с помощью ручной масленки через каждые 6...8 ч. В качестве смазки применяют масла промышленные марок И-40А (ГОСТ 20799—88*), а при малых нагрузках — И-30А.

Несущая способность и подбор цепных передач

Несущая способность цепных передач определяется из условия, что давление в шарнирах не должно превышать допускаемого $[p]$.

Допускаемая полезная сила $[F]$, Н, которая может передаваться цепью с шарниром скольжения, определяется зависимостью

$$[F] = [p]_0 S / K_3.$$

Здесь $[p]_0$ — допускаемое давление в шарнирах для средних эксплуатационных условий, МПа (табл. 3.13); S — площадь проекции опорной поверхности шарнира, мм², которая зависит от диаметра оси d и ширины B (для втулочных и роликовых цепей это ширина внутреннего звена, а для зубчатых — ширина цепи): $S = dB$ — для роликовых цепей, $S = 0,76dB$ — для зубчатых цепей с шарнирами скольжения. Коэффициент эксплуатации K_3 представляет собой произведение коэффициентов

$$K_3 = K_d K_u K_n K_{\text{рег}} K_{\text{см}} K_{\text{реж}},$$

где K_d — коэффициент, учитывающий динамичность нагрузки: при спокойной нагрузке равен 1, при нагрузке с толчками — 1,2...1,5, при сильных ударах — 1,8; K_u — коэффициент, который учитывает межосевое расстояние: при $A = (30...50)t$ принимают $K_u = 1$, при $A < 25t$ $K_u = 1,25$, при $A = (60...80)t$ $K_u = 0,9$; K_n — коэффициент, учитывающий наклон передачи: при угле наклона линии центров звездочек к горизонту до 45° $K_n = 1$, более 60° — до 1,25; $K_{\text{рег}}$ учитывает регулировку передачи: для передач с регулировкой положения оси одной из звездочек он равен 1, для передач с оттяжными звездочками или нажимными роликами — 1,1, для передач с регулируемыми осями звездочек — 1,25; $K_{\text{см}}$ — коэффициент, учитывающий характер смазывания: при непрерывном смазывании в масляной ванне или от насоса $K_{\text{см}} = 0,8$, при регулярном капельном или внутришарнирном смазывании — 1, при периодическом смазывании — 1,5; $K_{\text{реж}}$ — коэффициент, учитывающий режим работы передачи: при односменной работе $K_{\text{реж}} = 1$, при двухсменной работе, с учетом удвоенного пути трения $K_{\text{реж}} = 1,25$, при трехсменной — $K_{\text{реж}} = 1,45$.

Если в результате расчета K_3 получается более трех, то нужно принимать конструктивные меры для улучшения работы передачи.

Подбор цепных передач. Задаются числом зубьев малой звездочки, при этом число зубьев большой звездочки не должно выходить за максимально допустимое.

После этого задаются шагом цепи в зависимости от частоты вращения малой звездочки (табл. 3.14).

При проектировочных расчетах однорядных втулочно-роликовых цепей проверяют мощность, которую могут передавать цепи,

Таблица 3.13. Допускаемое давление в шарнирах скольжения цепей

Шаг t , мм	$[p]_0$, МПа, при частоте вращения малой звездочки, мин ⁻¹											
	Менее 50	200	400	600	800	1 000	1 200	1 600	2 000	2 400	2 800	3 200
12...15,875 19,05...25,4 30...38,1 40...50,8	Роликовые цепи											
	35	31,5	28,5	26	24	22,5	21	18,5	16,5	15	14	—
	35	30	26	23,5	21	19	17,5	15	—	—	—	—
	35	29	24	21	18,5	16,5	15	—	—	—	—	—
	35	26	21	17,5	15	—	—	—	—	—	—	—
12,7...15,875 19,05...25,4 31,75...44,45	Зубчатые цепи											
	20	18	16,5	15	14	13	12	10,5	9,5	8,5	8	7
	20	17	15	13	12	11	10	8,5	7,5	—	—	—
	20	16,5	14	12	10,5	9,5	7	—	—	—	—	—

Примечание. Для роликовых цепей повышенной точности и прочности $[p]_0$ можно повысить на 30...40 %.

Таблица 3.14. Рекомендуемые наибольшие значения $n_{\text{нр}}$ и предельные значения $n_{\text{пр}}$ частоты вращения, мин^{-1} , малой звездочки

Тип цепи	Частота вращения	Шаг цепи t , мм					
		8	9,52	12,7	15,875	19,05	25,4
Роликовые	$n_{\text{нр}}$	3 000	2 500	1 250	1 000	900	800
	$n_{\text{пр}}$	6 000	5 000	3 100	2 300	1 800	1 200
Зубчатые	$n_{\text{нр}}$	—		3 300	2 650	2 200	1 650
	$n_{\text{пр}}$	—		4 000	3 300	2 700	2 000

Продолжение табл. 3.14

Тип цепи	Частота вращения	Шаг цепи t , мм					
		31,75	38,1	44,45	50,8	63,5	76,1
Роликовые	$n_{\text{нр}}$	630	500	400	300	200	150
	$n_{\text{пр}}$	1 000	900	600	450	300	210
Зубчатые	$n_{\text{нр}}$	1 320	—				
	$n_{\text{пр}}$	1 500	—				

Примечание. При частоте вращения $n_{\text{нр}}$ число зубьев малой звездочки должно быть ≥ 15 . При частоте вращения $n_{\text{пр}} \geq 20$ необходима повышенная точность изготовления звездочек, монтажа передачи и обильное смазывание.

и окончательно выбирают цепь с возможно меньшим шагом из числа цепей, обеспечивающих передачу требуемой мощности.

При проектировании многорядных роликовых цепных передач для цепи выбранного шага определяют мощность N_1 , которую может передавать один ряд цепи, затем определяют коэффициент рядности цепи $k_p = N/N_1$, а затем по нему требуемое число рядов z_p :

k_p	1	1,7	2,5	3
z_p	1	2	3	4

Коэффициент рядности учитывает неодинаковую нагрузку рядов многорядной цепи. Если число рядов получилось слишком большим, делают пересчет, задаваясь другим шагом.

Для нормальных и усиленных однорядных роликовых цепей площадь проекции опорной поверхности шарнира может быть представлена в виде функции шага $S = 0,28t^2$, мм^2 .

Тогда допускаемую силу $[F]$, Н, которую может передавать цепь, можно выразить через шаг t , мм:

$$[F] = [p]_0 S / K_p = (0,28[p]_0 t^2 k_p) / K_p.$$

Мощность N , кВт, связана с силой F , Н, и скоростью v , м/с, следующей зависимостью:

$$N = Fv/10^3.$$

Скорость цепи v , м/с, выразим через частоту вращения n_1 , мин⁻¹, малой звездочки:

$$v = \frac{tz_1 n_1}{1\,000 \cdot 60}.$$

Подставив в выражение для мощности допускаемую силу $[F]$, Н, и скорость v_1 , м/с, получим мощность N , кВт:

$$N = \frac{0,28[p]_0 t^3 k_p z_1 n_1}{10^3 \cdot 10^3 \cdot 60 K_3}.$$

Из этой зависимости определяем шаг

$$t \geq 600 \sqrt[3]{\frac{NK_3}{[p]_0 k_p z_1 n_1}}.$$

3.17. ВИНТ—ГАЙКА СКОЛЬЖЕНИЯ

Передача винт—гайка предназначена для преобразования вращательного движения в прямолинейное поступательное. Передачи винт—гайка скольжения обеспечивают большой выигрыш в силе, возможность осуществить медленное движение, большую несущую способность при малых габаритных размерах, высокую точность перемещения исполнительного органа, жестко связанного с гайкой, и простоту конструкции.

Недостатками являются большие потери на трение, низкий КПД, невозможность применения при больших скоростях перемещений. Скорость скольжения профиля резьбы винта относительно профиля резьбы гайки в 10—40 раз превышает скорость осевого перемещения узла, жестко скрепленного с гайкой.

Область применения передач винт—гайка скольжения: поднятие грузов (домкраты), нагружение в испытательных машинах, механическая обработка на металлорежущих станках и винтовых прессах; управление оперением самолетов; точные делительные

перемещения в измерительных и делительных машинах, в металлорежущих станках; установочные перемещения для настройки и регулирования машин.

В отличие от крепежных резьб в ходовых и грузовых винтах должны быть наименьшие потери на трение. Поэтому используют резьбы с малыми углами профиля, чаще всего **трапецеидальные** (рис. 3.60, а), причем в основном — резьбу со средним шагом. Резьбу с мелким шагом применяют для перемещений повышенной точности и относительно медленных перемещений. Резьбу с крупным шагом используют в тяжелых (по износу) условиях работы.

Прямоугольные резьбы (рис. 3.60, б) используют для осуществления очень точных перемещений, поскольку потери на трение из всех типов резьб (рис. 3.60, а — г) у прямоугольных меньше, а кроме того, у этого профиля наименьшее влияние неизбежных радиальных биений на точность перемещения гайки, а следовательно, и исполнительного механизма.

Недостатком прямоугольной резьбы является трудность изготовления — невозможность окончательной обработки шлифованием, что ограничивает ее применение.

В крепежных резьбовых соединениях чаще всего применяют **метрические** (рис. 3.60, в) и **дюймовые** (рис. 3.60, г) резьбы.

Для точных винтов делительных и измерительных машин применяют **треугольные** резьбы с углом профиля 30° и даже 60° , которые можно изготовить с малым шагом.

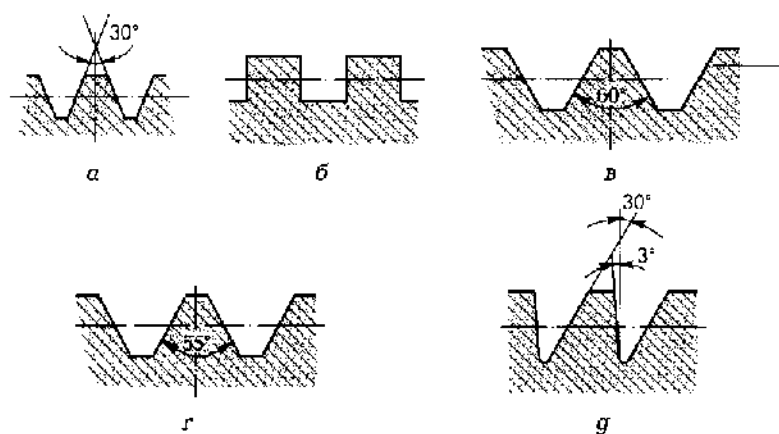


Рис. 3.60

Для винтов, подверженных большому одностороннему осевому нагружению (в прессах, нажимных устройствах прокатных станов), применяют **упорную** резьбу (рис. 3.60, *g*).

Материалы винтов должны обладать высокой износостойкостью и хорошей обрабатываемостью; тяжело нагруженные винты необходимо изготавливать из высокопрочных материалов.

Винты, не подвергаемые закалке, изготавливают из сталей 45, 50 или А35, А40Г, в ответственных крепежных соединениях — из стали А12; подвергаемые закалке — из сталей 50Г, 40Х; азотируемые — из сталей 40ХФА, 18ХГТ. Азотирование обеспечивает высокую износостойкость и минимальное демпфирование при упрочнении (см. главу 4), поэтому для ходовых винтов металлорежущих станков рекомендуется применять азотирование.

Материалы гаек — бронзы оловянистые (БрО10Ф1, БрО6Ц6С3) и цинковый сплав ЦАМ10-5; при малых скоростях и нагрузках — чугуны. Гайки больших и средних диаметров заливают антифрикционным сплавом.

Конструктивные особенности винта и гайки

Конструкции винтов должны удовлетворять общим требованиям, предъявляемым к валам: не иметь резких переходов диаметров, буртиков большого диаметра, чтобы не превращать в стружку металл и т. п. Длинные винты выполняют составными, их устанавливают на двух опорах (короткие устанавливают на одной, второй опорой служит гайка). Один конец ходового винта обычно фиксируется в опоре, что позволяет воспринимать осевые усилия.

Гайки ходового винта выполняют цельными и разъемными; их условные обозначения приведены в Приложении V. В прецизионных металлорежущих станках осуществляют безлюфтовую передачу винт—гайка скольжения. Это достигается применением двойных гаек, расположенных в одном корпусе 3 (рис. 3.61, *a*). Они смещаются одна относительно другой в осевом направлении, т. е. поворотом гаек 2 и 4 вокруг ходового винта 1 в противоположных направлениях, после чего их положение фиксируется контргайками 5. Теперь при вращении ходового винта в одном направлении перемещение суппорта 6 будет происходить от левой гайки 2; если же ходовой винт изменит направление вращения, то правая гайка 4 сразу передаст движение суппорту в противоположном направлении. В такой конструкции люфт не выбирается, так как каждая гайка работает по своему направлению. На рис. 3.61, *б* наглядно пока-

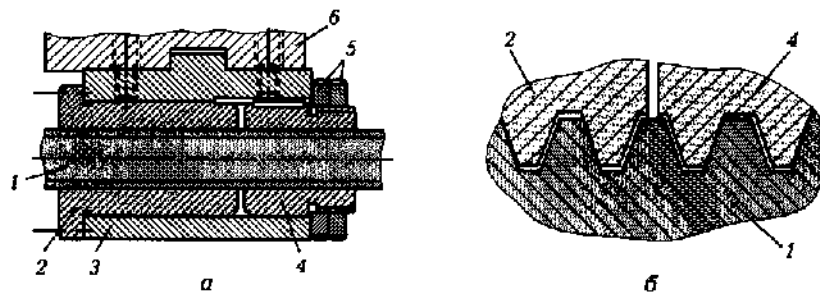


Рис. 3.61

зано, как соприкасаются профили резьбы левой и правой гаек с профилями резьбы ходового винта.

Основной причиной выхода из строя передачи винт — гайка является изнашивание. Для обеспечения необходимой износостойкости давление в резьбе не должно превышать допустимое:

$$p = \frac{F}{\pi d_2 h z} \leq [p],$$

где F — расчетная осевая сила, действующая на винт; d_2 — средний диаметр; h — рабочая высота профиля (для трапецеидальной резьбы $h = 0,5P_{х.в.}$, где $P_{х.в.}$ — шаг резьбы ходового винта); z — число витков резьбы на высоте гайки H :

$$z = H/P_{х.в.}$$

Подставляя в формулу значения h и z , получим

$$p = \frac{2F}{\pi d_2 H} \leq [p].$$

Отсюда можно определить средний диаметр резьбы

$$d_2 \geq \sqrt{\frac{2F}{\pi \psi [p]}},$$

где $\psi = H/d_2$; для цельных гаек $\psi = 1,2 \dots 2,5$; для разъемных гаек $\psi = 2,5 \dots 3,5$. Большие значения ψ принимают для резьб меньших диаметров. Допускаемые давления в резьбе для пар:

закаленная сталь — бронза $[p] = 12 \text{ Н/мм}^2$;
 незакаленная сталь — бронза $[p] = 9 \text{ Н/мм}^2$;
 незакаленная сталь — чугун $[p] = 5 \text{ Н/мм}^2$.

Давление в резьбе для точных резьб (делительные машины) должно быть в 2—3 раза меньше.

Сильно нагруженные винты проверяют на прочность при совместном действии сжатия и кручения; эквивалентное напряжение должно быть меньше допускаемого напряжения на растяжение:

$$\sigma_{\text{э}} = \sqrt{\left(F/S_1\right)^2 + 3\left(M_{\text{кр}}/W_p\right)^2} \leq [\sigma]_p,$$

где $M_{\text{кр}}$ — крутящий момент, скручивающий винт; S_1 и W_p — соответственно площадь и полярный момент сопротивления сечения винта, взятые по внутреннему диаметру резьбы.

Допускаемое напряжение берется $[\sigma]_p \leq \sigma_T/3$ во избежание местных пластических деформаций.

Длинные винты проверяют на потерю устойчивости по Эйлеру, за расчетное принимают крайнее положение гайки, когда винт подвергается сжатию на максимальной длине:

$$F \leq \frac{\pi^2 E J_{\text{пр}}}{n(\mu l)^2},$$

где E — модуль упругости 1-го рода; $J_{\text{пр}} = \frac{\pi d_1^4}{64} \left(0,4 + 0,6 \frac{d}{d_1}\right)$ — приведенный момент инерции; d и d_1 — соответственно наружный и внутренний диаметры резьбы; $n = 2,5 \dots 4,0$ — коэффициент безопасности; μl — приведенная длина; l — расстояние между опорами для двухопорных ходовых винтов, а для коротких винтов — это расстояние между опорой и серединой гайки.

3.18. ВИНТ—ГАЙКА КАЧЕНИЯ

Передачи винт—гайка качения применяются в механизмах, где необходима плавность перемещения, в следящих системах, станках с числовым программным управлением. КПД таких передач достигает 0,9. В резьбе может быть выбран полностью зазор и создан предварительный натяг, обеспечивающий высокую осевую жесткость. В качестве тел качения используются шарики и ролики, но чаще применяются шариковые передачи. В литературе часто встречается аббревиатура ВГК (винт—гайка качения) и ШВП (шариковая винтовая передача).

На винте и в гайке выполняется винтовая канавка (чаще полукруглого профиля), по которой перекатываются тела качения (шарики или ролики). Диаметр шарика $d_{ш} = 0,6P_{х.в.}$

При использовании ШВП в машинах точных перемещений недопустим осевой зазор. В этом случае ВГК выполняют по аналогии с рассмотренной на рис. 3.61 передачей винт—гайка скольжения. В едином корпусе 6 (рис. 3.62) размещают две гайки 2 и 4, смещенные одна относительно другой по винтовой линии. Это также создает беззащелочную передачу.

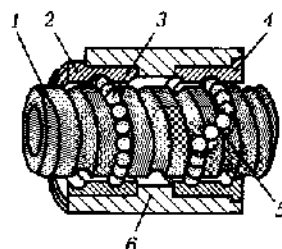


Рис. 3.62

В отличие от винтовой передачи скольжения в ШВП должен быть создан предварительный натяг: еще до приложения рабочей нагрузки в конструкции ШВП с помощью прокладок или пружин путем затягивания резьбовых соединений создаются предварительные осевые усилия. Теперь тела качения 3 вместо точечного контакта с дорожкой качения имеют контакт по небольшой поверхности (в силу упругого перемещения под действием приложенных сил). Таким образом повышают осевую жесткость ШВП.

В большинстве конструкций шарики в гайке перемещаются по замкнутой траектории. Каналом возврата служит специальная вставка 5 (см. рис. 3.62), соединяющая два соседних витка гайки, которая заставляет циркулировать шарики только в пределах одного шага ходового винта 1.

В станкостроении нормализованные шариковые пары винт—гайка изготавливают на специализированных заводах.

Допустимую статическую нагрузку рассчитывают исходя из допускаемых упругих контактных напряжений $250 \dots 300 \text{ кН/см}^2$.

Допускаемая нагрузка на один шарик при напряжении 250 кН/см^2 $[F_1] = 20d_{ш}^2 \text{ Н}$, где $d_{ш}$ — диаметр шарика, мм. Общая допускаемая осевая статическая нагрузка на винт

$$[F] = z_p [F_1] \sin \alpha \cos \psi,$$

где расчетное число шариков $z_p = 0,7z$; z — число шариков, находящихся в контакте, т. е. только в одной из гаек — левой или правой; α — угол контакта шарика, обычно $\alpha = 45^\circ$; ψ — угол подъема винтовой линии резьбы, $\psi = 2 \dots 5^\circ$.

Так рассчитывают нагрузку, допускаемую на винт для тихоходных передач.

Если же общее число циклов нагружений $N > 10^7$, то нагрузку снижают, умножая ее на коэффициент $\sqrt[3]{10^7/N}$.

Материалы для ШВП: винты изготавливают из сталей ХВГ и 7ХГ2ВМ с объемной закалкой, 8ХВ с закалкой при индукционном нагреве и 20Х3МВФ с азотированием. Для гаек применяют стали 9ХГС, ШХ15, ХВГ с объемной закалкой и цементируемые стали 18ХГТ, 12ХНЗА. Рабочие поверхности закаливают до твердости 60 HRC и выше.

3.19. РЕЕЧНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Реечная передача, как и передача винт—гайка, служит для преобразования вращательного движения в поступательное прямолинейное, и наоборот. Реечная передача (рис. 3.63) состоит из зубчатого колеса 1 и зубчатой рейки 2. Рейка является частным случаем зубчатого колеса, когда радиус колеса увеличен до бесконечности. При этом колесо превращается в рейку, а эвольвентный профиль зуба — в прямолинейный. При увеличении числа зубьев некорригированного колеса до бесконечности получают так называемую основную рейку, очерченную исходным контуром. Основная рейка полностью определяет профили зубьев всех колес нормального зацепления.

Параметры исходного контура (рис. 3.64) стандартизованы: угол профиля $\alpha = 20^\circ$, глубина захода зубьев в рейку $h_{зуб} = 2m$, радиальный зазор между зубьями в цилиндрических передачах $c = 0,25m_n$ (при нарезке долбьями — до $0,35m_n$), радиус выкружки у корня

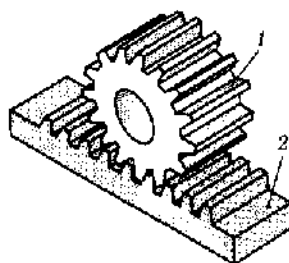


Рис. 3.63

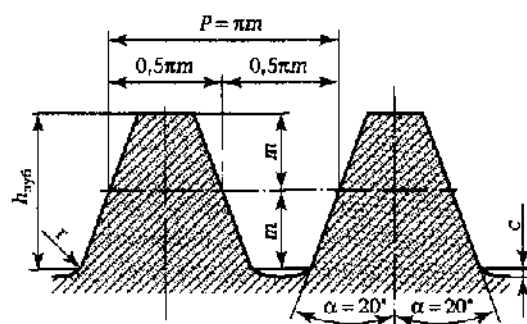


Рис. 3.64

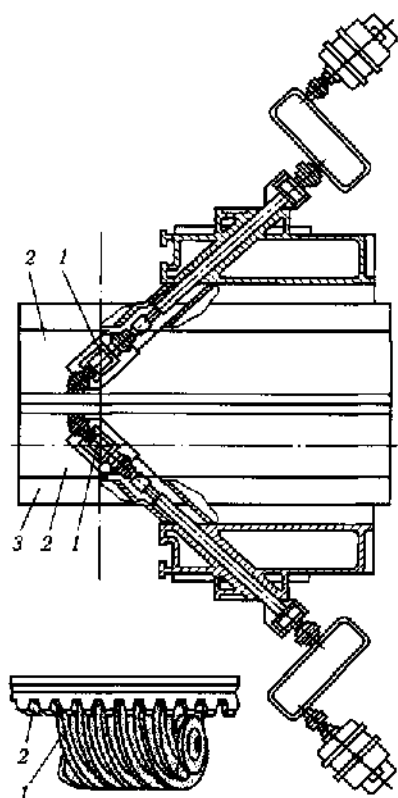


Рис. 3.65

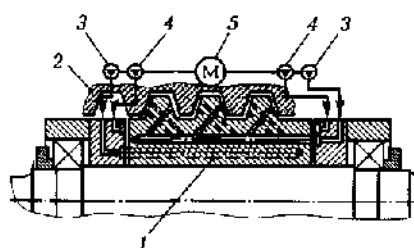


Рис. 3.66

зуба для цилиндрических колес $r = 0,4m_n$ (m_n — нормальный модуль).

Реечная передача может быть выполнена с прямозубым и косозубым зацеплением колеса с рейкой. За один оборот прямозубого колеса с числом зубьев z и шагом P рейка переместится на $H_1 = Pz = \pi m z$, а за n оборотов зубчатого колеса — на $H = \pi m z n$.

Реечные передачи очень часто используют в металлорежущих станках, например в токарных, для осуществления движения продольной подачи суппорта с резцом относительно обрабатываемой заготовки. В более крупных станках, таких как продольно-строгальные, необходимо передавать большие усилия. Там применяют червячно-реечную передачу. На рис. 3.65 показан вид снизу на стол продольно-строгального станка; к столу 3 неподвижно прикреплены рейки 2. Вращение червяков 1 преобразуется в поступательное прямолинейное перемещение рейки, а следовательно, и

стола с установленным на нем обрабатываемым изделием. Перемещение рейки (следовательно, и стола) за один оборот червяка с числом заходов k будет равно $H_1 = \pi m k$, а за n оборотов зубчатого колеса — на $H = \pi m k n$. Обычно в таких передачах число заходов червяка $k = 8 \dots 10$.

Для уменьшения трения в передаче червяк—рейка между профилями их зубьев подается под давлением тонкий слой масла. Такие гидростатические червячно-реечные передачи используют в приводе подач тяжелых станков. На рис. 3.66 показано устройство гидростатической червячно-реечной передачи многоцелевого станка модели 6620МФ4 Ульяновского завода тяжелых и уникальных станков. С помощью гидрораспределителя в каналы червяка 1 от насосов 3 под давлением подается масло. Оно создает масляный слой между зубьями червяка и рейки, зубья 2 которой армированы пластмассой. В осевые зазоры соединения масло нагнетается насосами 4. Все насосы имеют один общий привод от электродвигателя 5.

3.20. КРИВОШИПНО-ШАТУННЫЕ МЕХАНИЗМЫ

В подразд. 3.17—3.19 были рассмотрены механизмы, преобразующие вращательное движение в поступательное и обеспечивающие постоянную скорость перемещения рабочих органов.

Кривошипно-шатунные механизмы (см. рис. 3.2, в) также предназначены для преобразования вращательного движения в поступательное, но они обеспечивают перемещение по определенному закону. Скорость рабочего органа не остается постоянной во время его движения. В этом есть свое преимущество: при изменении направления скорости не возникает ударов и больших нагрузок, так как к моменту реверсирования движения скорость рабочего органа постепенно падает, приближаясь к нулю. Кроме того, возвратно-поступательное движение в кривошипно-шатунных механизмах осуществляется без применения дополнительных реверсивных механизмов.

Кривошипно-шатунные механизмы имеют широкое распространение в поршневых двигателях, насосах, компрессорах, станках с прямолинейным движением резания.

На рис. 3.67 представлены различные схемы работы кривошипно-шатунного механизма. Центральный кривошипно-шатунный механизм (рис. 3.67, а, в и г) в зависимости от соотношения $\lambda = r/l$ может иметь различные применения. При $l < r$ (см. рис. 3.67, г) кри-

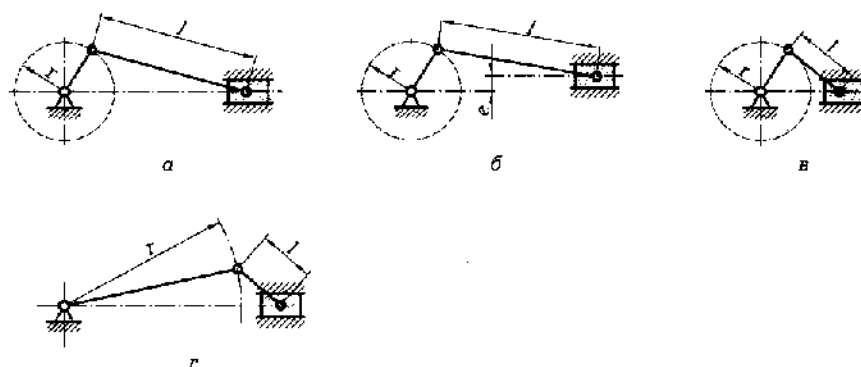


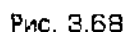
Рис. 3.67

вошпнно-шатунный механизм применяется для получения большого выигрыша в силе, поэтому используется в зажимных устройствах, прессах. При $l > r$ (см. рис. 3.67, а) длина хода ползуна равна $2r$ и чем меньше λ , тем в лучших условиях будет работать механизм и тем выше его КПД. При $l = r$ (см. рис. 3.67, в) кривошипно-шатунный механизм имеет наибольший ход, равный $4r$. Однако при прохождении мертвых точек в середине хода рекомендуется иметь специальные устройства, так как использование сил инерции звеньев здесь не является надежным. Поэтому механизм с $\lambda = 1$ на практике применяется очень редко.

На рис. 3.67, б показан смещенный кривошипно-шатунный механизм, у которого помимо изменения параметра λ может меняться величина эксцентриситета e , что позволяет более широко варьировать углы передачи. Длина хода у этого механизма примерно равна $2r$; механизм имеет весьма широкое применение.

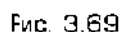
3.21. КУЛИСНЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Кривошипно-кулисный механизм (в дальнейшем будем сокращенно называть кулисным механизмом) служит для преобразования вращательного движения в поступательное. Существует семь различных схем кулисных механизмов. В одних кулиса качается, в других вращается неравномерно, в третьих вращается равномерно и т. д. Есть кулисные механизмы с двумя поступательными парами, причем сама кулиса перемещается поступательно.



На рис. 3.68 представлена схема привода с качающейся кулисой. Кулисное колесо 1 получает вращение от ведущего колеса $z_{\text{вд}}$. На кулисном колесе закреплен палец 2 с надетым на него камнем 3. Камень вставлен в прорезь кулисы 4 и может скользить вдоль прорези. Верхний конец кулисы через серьгу 5 связан с ползуном 6.

Длина хода ползуна L зависит от амплитуды качания кулисы. Его можно регулировать изменением величины радиуса R вращения пальца 2. Если $A > R$, кулиса качается и при $R/A \leq 0,5$ угол качания



$2\alpha = 60^\circ$; если $A < R$, то кулиса вращается неравномерно; при $A = R$ кулиса равномерно вращается.

Кулисный привод поперечно-строгального станка с качающейся кулисой (рис. 3.69) спроектирован в соответствии с кинематической схемой, изображенной на рис. 3.68. Кулисный механизм обеспечивает плавность хода при строгании поверхности заготовки и быстрый отвод инструмента при обратном холостом ходе. В этом преимущество кулисных механизмов. Кулиса 4 совершает качательное движение, которое с помощью серы 3 преобразуется в поступательное прямолинейное движение ползуна 5 станка. Кулисное колесо 2 получает вращение от коробки скоростей через шестерню 1. Вместе с камнем кулисное колесо вращается вокруг оси O_1 , а кулиса качается вокруг оси O . Радиус вращения камня устанавливается вращением винта 6.

Недостатком кулисного механизма является неравномерная скорость рабочего хода и постоянное соотношение между временем рабочего и холостого хода.

3.22. КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Кулачковые механизмы характеризуются наличием одной или нескольких высших кинематических пар кулачкового типа.

Кулачковые механизмы дают возможность воспроизводить движение ведомых звеньев по любым заданным законам. Это свойство механизмов, а также сравнительная простота профилирования кулачков обеспечили их широкое использование в различных отраслях машиностроения. Наибольшее распространение получили плоские механизмы с одной парой кулачкового типа, а из пространственных кулачковых механизмов — с барабанными или торцовыми кулачками.

Для получения нужного движения достаточно иметь механизм с одной высшей парой кулачкового типа (рис. 3.70, а и б), обеспечивающей движение точки M по заданной кривой с обусловленной скоростью. От привода кулачковый механизм получает постоянную скорость v (см. рис. 3.70, а) и толкатель 1, поджатый пружиной 2 к кулачку 3, перемещает исполнительный орган по заданной траектории. Здесь соприкосновение элементов осуществляется в точке, а на рис. 3.70, б — по линии. Если же требуется воспроизвести движение точки по определенной плоской кривой с постоянной скоростью, то для воспроизведения такого движения требует-

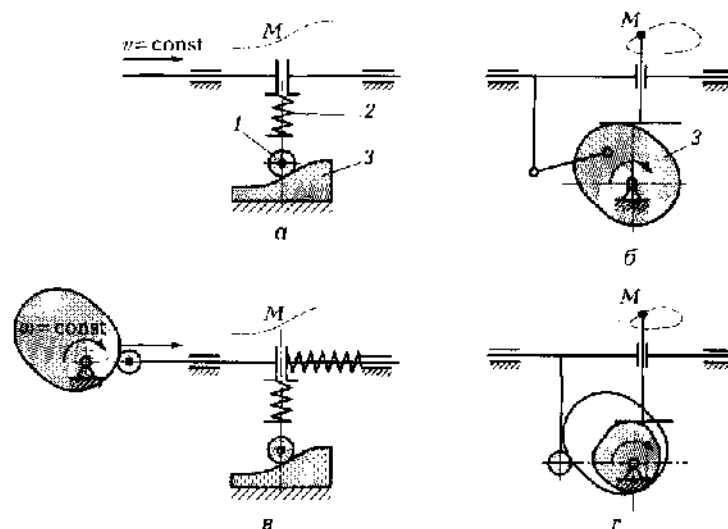


Рис. 3.70

ся механизм с двумя высшими парами кулачкового типа (рис. 3.70, в и г), обеспечивающий движение точки M по заданной кривой с постоянной скоростью.

Кулачок обычно имеет рабочие и холостые участки. На рабочих участках характер движений ведомого звена определяется рабочим процессом в машине (например, технология обработки на металлорежущих станках требует постоянства скорости подачи). На участках холостого хода выполняются вспомогательные движения; здесь желательно произвести перемещение ведомого звена за возможно более короткое время при меньшем перемещении ведущего звена (кулачка). Препятствием к сокращению времени являются динамические условия, которые могут привести к неспокойной работе механизма.

Достоинством кулачковых механизмов является возможность автоматизации цикла работы машины, а недостатком — износ контактируемой поверхности кулачка, что приведет в итоге к потерям точности и производительности машины.

3.23. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РЕДУКТОРАХ

Редуктор — это механизм, служащий для передачи вращения от ведущего вала к ведомому с понижением частоты вращения и

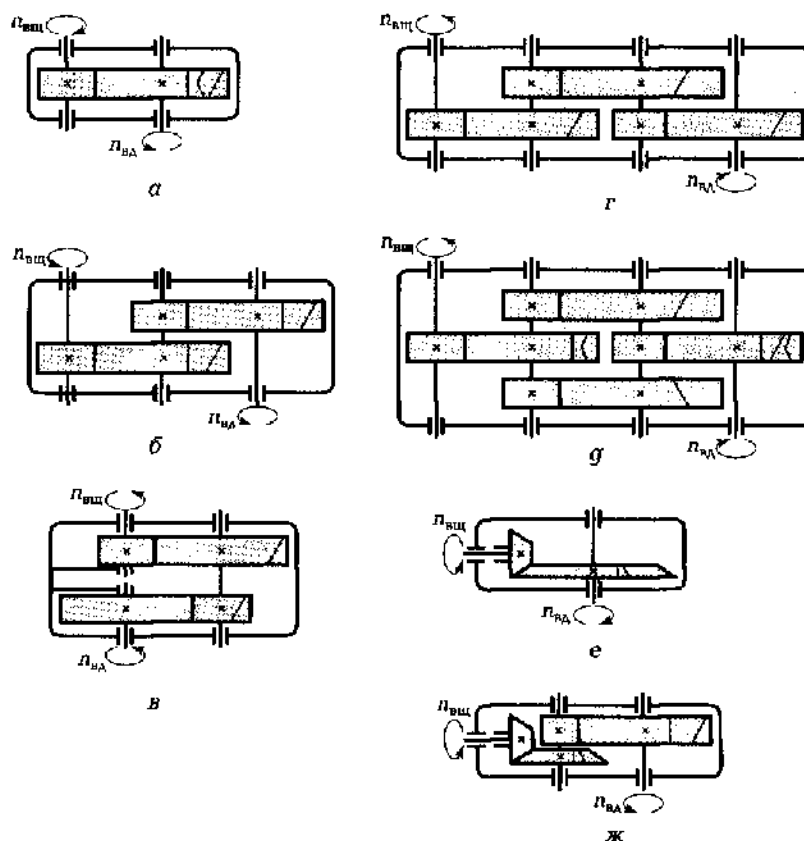


Рис. 3.71

увеличением крутящих моментов; передаточное отношение в редукторе — величина постоянная. Редукторы выполняются в виде отдельных агрегатов. В зависимости от вида входящих в них передач существуют зубчатые, червячные и планетарные редукторы.

Зубчатые редукторы нашли широкое применение в подъемно-транспортных механизмах, оборудовании для металлургической промышленности и химическом машиностроении. **Одноступенчатые** редукторы (рис. 3.71, а) используют в тех случаях, когда передаточные числа невелики (не более 8), так как при увеличении передаточного числа сильно увеличиваются габаритные размеры редуктора. В большинстве случаев применяют **двухступенчатые** редукторы (рис. 3.71, б, в), передаточные числа которых колеблются

от 8 до 40. При больших передаточных числах используют трехступенчатые редукторы (рис. 3.71, г, г) или планетарные редукторы, которые более компактны.

На рис. 3.72, а показан общий вид одноступенчатого редуктора, а на рис. 3.72, б — разрез трехступенчатого.

Зубчатые редукторы могут состоять из прямозубых, косозубых, как цилиндрических, так и конических колес (рис. 3.71, е, ж).

Для большей редукции применяют одноступенчатые червячные редукторы (i до 63) (рис. 3.73) и двухступенчатые, а иногда и комбинированные зубчато-червячные.

Червячные редукторы выполняют со следующим расположением червяка:

- 1) нижнее расположение червяка (рис. 3.73, а) применяют при окружных скоростях червяка до 5 м/с, смазывание — окунанием червяка;
- 2) верхнее расположение червяка (рис. 3.73, б) используют в быстроходных передачах, смазывание — окунанием колеса;
- 3) червяк имеет горизонтальную ось вращения, а червячное колесо — вертикальную (рис. 3.73, в);
- 4) червяк с вертикальной осью вращения (рис. 3.73, г).

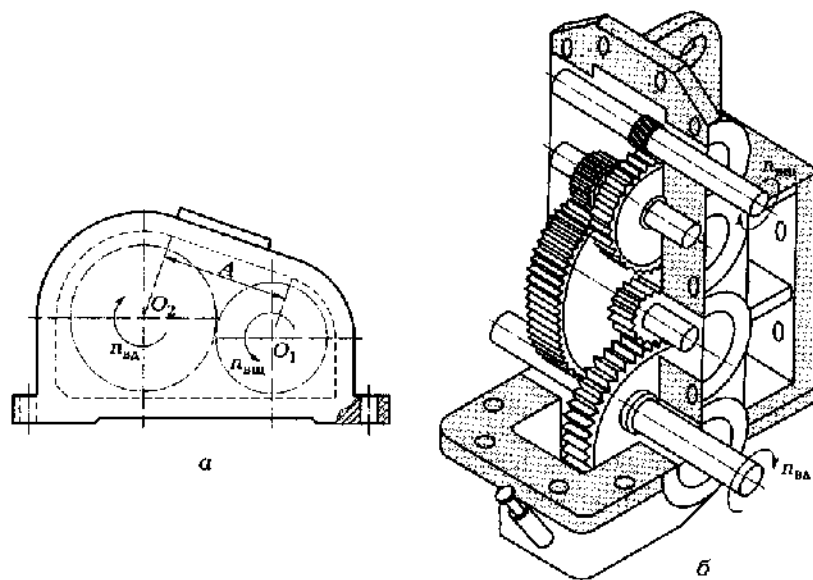


Рис. 3.72

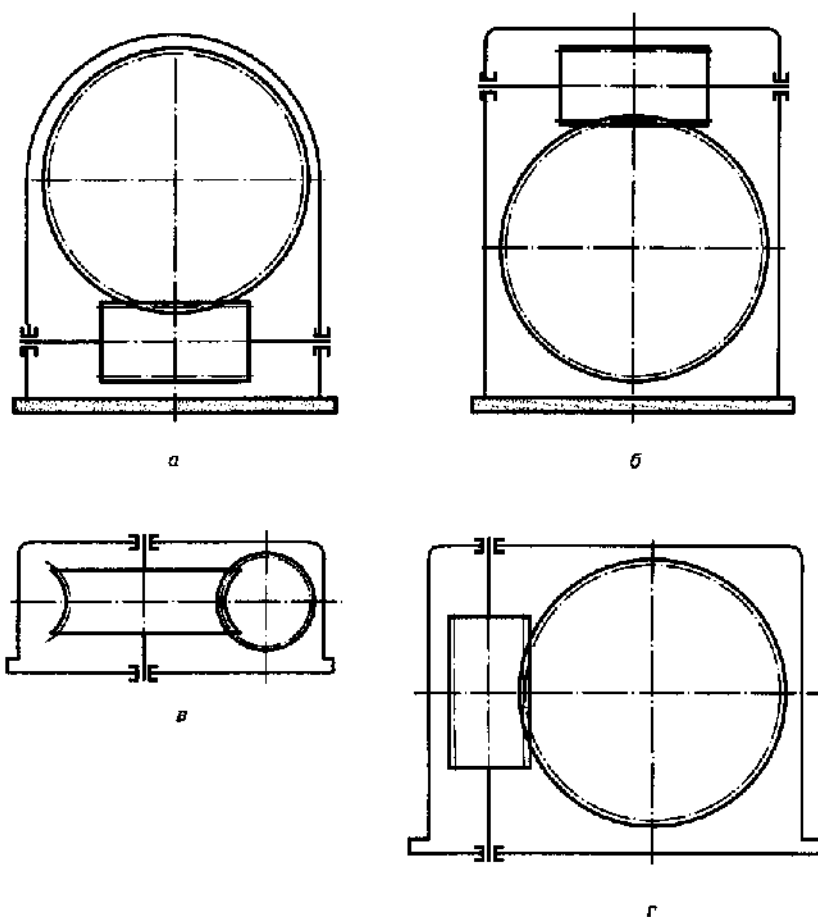


Рис. 3.73

Две последние схемы применяются редко, так как возникают большие трудности со смазыванием подшипников вертикальных валов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Из каких механизмов состоит машина?
2. Что такое механизм?
3. Чем различаются узлы и детали машин и какая между ними связь?

4. Какие кинематические пары вы знаете?
5. Назовите критерии работоспособности машин.
6. Как условно изображают на схемах кинематические пары и муфты?
7. Какие соединения деталей машин относятся к неразъемным?
8. Перечислите разъемные соединения.
9. За счет чего передается движение в фрикционных передачах?
10. Какие зубчатые передачи вы знаете?
11. Назовите достоинства и недостатки зубчатых передач.
12. Что такое модуль зубчатого колеса?
13. Чем отличается червячное колесо от цилиндрического прямозубого?
14. Что вы знаете о передаче Новикова?
15. При каком расположении валов применяются конические зубчатые передачи?
16. Почему у червячных передач КПД значительно ниже, чем у зубчатых зацеплений?
17. Расскажите о достоинствах и недостатках цепных передач.
18. Как связаны передаточное отношение и передаточное число?
19. Чем отличается вал от оси?
20. Какие вы знаете подшипники скольжения?
21. Что такое подпятник?
22. Какие опоры вращающихся деталей вы знаете?
23. Расскажите о назначении муфт.
24. Приведите примеры нерасцепляемых и расцепляемых муфт.
25. Какие вы знаете предохранительные муфты?
26. Чем отличаются пружины от рессор? Что у этих деталей общего?
27. Что такое безлюфтовая передача? Приведите примеры.
28. Какие передачи винт—гайка вы знаете? Чем они отличаются?
29. Какие профили резьбы используют в передачах винт—гайка?
30. Что такое ШВП? Когда эта передача применяется?
31. Приведите примеры корпусных деталей.
32. Где и для чего используются кулисные механизмы?
33. Какие реечные передачи вы знаете? Какова область их применения?
34. Что такое кривошипно-шатунный механизм? Для какой цели он применяется?
35. Из каких материалов изготавливают корпусные детали?
36. Назовите изделия, в которых используются пружины.
37. Приведите примеры использования рессор.
38. Какие типы редукторов вы знаете?
39. Какие соединения относятся к неразъемным?
40. Какие механизмы применяют при необходимости воспроизвести движение по заданному закону?
41. Назовите примеры разъемных соединений.

Глава 4

ИЗМЕНЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

4.1. ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ИЗМЕНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Одни и те же детали машин могут иметь различное назначение, поэтому для их изготовления необходимы материалы с совершенно различными свойствами.

Винт, через который проходит электрический ток, должен быть изготовлен из латуни, а винт, скрепляющий две детали разъемного соединения и находящийся под действием растягивающей нагрузки, — из стали. Ходовой винт станка также изготовлен из стали, но поверхность профиля резьбы должна быть износостойкой. В этом случае на поверхности профиля резьбы необходимо изменить механические свойства основного материала, из которого изготовлен ходовой винт.

Существует несколько способов изменения механических свойств:

- глубокая закалка с последующим высоким или низким отпускem;
- цементирование поверхности детали с поверхностной закалкой;
- пластическое деформирование поверхностных слоев; нанесение покрытий (это позволяет изменять механические свойства материала на поверхности детали);
- выдавливание на поверхностях трения деталей машин канавок для повышения износостойкости;
- электромеханический метод упрочнения рабочих поверхностей резьбы ходовых винтов и др.

В данной главе не будут изучаться изменения механических свойств материалов глубокой закалкой, а также цементованием с последующей поверхностной закалкой, так как это подробно излагается в курсе «Материаловедение».

4.2. УПРОЧНЯЮЩАЯ ОБРАБОТКА ПЛАСТИЧЕСКИМ ДЕФОРМИРОВАНИЕМ

Этот вид обработки основан на использовании пластических свойств металлов, т.е. способности металлических заготовок воспринимать остаточные деформации без нарушения целостности поверхности; в результате поверхность упрочняется, что очень важно для повышения надежности работы деталей. Детали становятся менее чувствительными к усталостному разрушению, у них повышается коррозионная стойкость, а также износостойкость сопрягаемых поверхностей. В результате пластического деформирования кристаллы поверхности металла сплющиваются в направлении деформирования, образуется упорядоченная структура волокнистого характера. При этом изменяются механические свойства поверхностного слоя. Пластическое деформирование нашло широкое применение, поскольку благодаря такому воздействию получается поверхность с низкой шероховатостью и благоприятными физико-механическими свойствами.

Для пластического деформирования наружных поверхностей используется *обкатывание* (рис. 4.1, а), а для внутренних — *раскатывание* (рис. 4.1, б). Упрочнять можно цилиндрические, конические и фасонные поверхности. Инструментами являются ролики или шарики, которые, внедрившись в поверхность заготовки, перемещаются вдоль нее, в результате чего вся поверхность оказывается пластически деформированной: выступы микронеровностей сглаживаются и заполняют микровпадины. К вращающейся заготовке подводят инструмент — закаленные гладкие ролики.

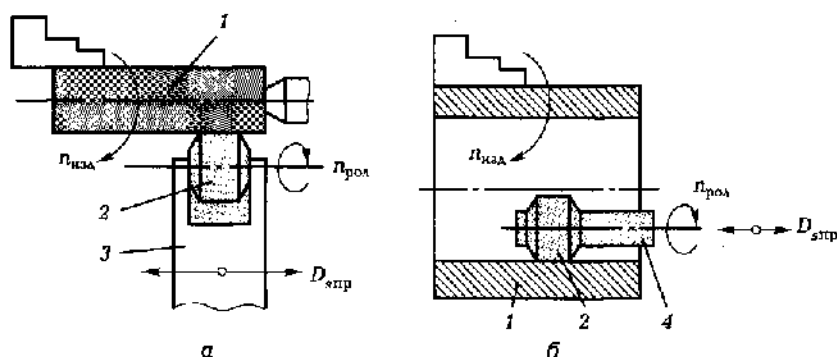


Рис. 4.1

При соприкосновении с изделием 1 (см. рис. 4.1, а) ролики 2 начинают вращаться и под действием приложенных сил деформируют поверхность изделия. Движение продольной подачи $D_{\text{сп}}$ позволяет обработать поверхность изделия по всей длине. Аналогичным инструментом упрочняют поверхность отверстия (см. рис. 4.1, б). При раскатывании инструмент-раскатник закрепляют на консольной оправке 4.

Обработку заготовок обкатыванием и раскатыванием производят на универсальных токарных станках. Деформирующий инструмент устанавливают в резцедержатель, в котором жестко закрепляют его державку 3 или оправку 4. Движение продольной подачи $D_{\text{сп}}$ обеспечивают суппорты токарных станков.

Глубокие отверстия раскатывают на станках глубокого сверления. В местах контакта заготовок с инструментом нагрев незначителен, поэтому охлаждение не требуется. Трение уменьшают, применяя смазывание верстанным маслом или керосином.

Упрочнение поверхности можно достигнуть **алмазным выглаживанием**. Сущность этого метода состоит в том, что оставшиеся после обработки резанием микронеровности поверхности выравнивает алмазный инструмент, прижатый к обрабатываемой поверхности. Алмаз, закрепленный в державке, не вращается, а скользит по поверхности. Рабочая часть алмазного инструмента может быть выполнена в виде полусферы, цилиндра или конуса.

Достоинствами алмазного выглаживания являются возможность обработки тонкостенных деталей и деталей сложной конфигурации; простота конструкций выглаживателей. Обрабатывать заготовки алмазным выглаживанием можно на токарных станках. Державку с подпружиненным наконечником с алмазом устанавливают в резцедержателе вместо резца. Движения заготовки и инструмента аналогичны их движениям при обтачивании.

Калибрование отверстий не только повышает их точность и качество, но и упрочняет поверхностный слой. При калибровании жесткий инструмент с натягом перемещается в отверстия заготовки. Размеры поперечного сечения инструмента несколько больше размеров поперечного сечения отверстия. Простейшим инструментом является шарик (рис. 4.2, а), который проталкивается штоком. Роль инструмента может выполнять также оправка-дорн, к которому приложена сжимающая (рис. 4.2, б) или растягивающая (рис. 4.2, в) сила. Калибрование отверстий выполняют на прессах или горизонтально-протяжных станках.

Дробеструйный наклеп получил наиболее широкое распространение из всех методов упрочняющей обработки. Готовые дета-

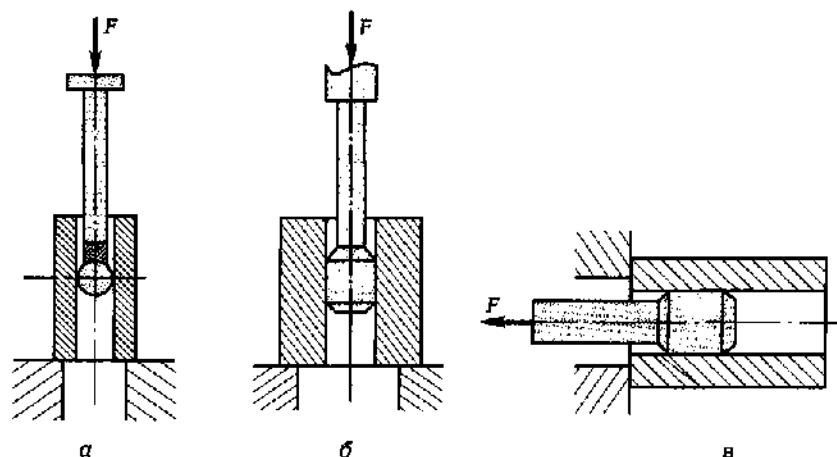


Рис. 4.2

ли машин подвергают ударному воздействию потока дроби. Обработку производят в специальных камерах. Дробинки из чугуна, стали и других материалов с большой скоростью перемещаются потоком воздуха, а после удара о заготовку падают вниз и снова осуществляют ударное действие. Благодаря такому методу можно значительно повысить долговечность рессорных листов, пружин, лопаток турбин, штоков и штампов.

4.3. ПОВЫШЕНИЕ ИЗНОСОСТОЙКОСТИ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ

В деталях машин изнашиваются только относительно тонкие поверхностные слои. Поэтому для увеличения долговечности эффективны поверхностные упрочнения, наплавки и покрытия.

Упрочнения в связи со значительным повышением твердости поверхности приводят к резкому повышению износостойкости. **Закалка** повышает износостойкость при чисто абразивном изнашивании почти в два раза.

В настоящее время объемная закалка уступает место поверхностным термическим и химико-термическим методам упрочнений. При такой обработке можно достигнуть высокой твердости поверхностных слоев и значительно повысить износостойкость. В подразд. 4.4 будет рассмотрено влияние поверхностных покры-

тий на изменение механических свойств материалов, в том числе и на повышение износостойкости поверхностных слоев.

Повышение износостойкости поверхностей трущихся чугунных деталей можно достичь *отбеливанием*. Отбеливание, в частности, применяется для тормозных колодок.

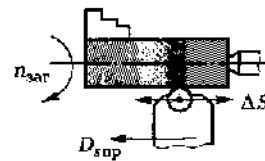


Рис. 4.3

Для повышения износостойкости деталей машин на поверхностях трения выдавливают слабо заметные, прилегающие друг к другу канавки. Эти канавки необходимы для размещения смазочного материала, а также мелких частиц, образующихся в процессе изнашивания. Благодаря таким канавкам значительно меньше изнашиваются трущиеся поверхности. Канавки образуют **вибронакаtywанием** (рис. 4.3). Упрочняющему элементу — шару или алмазу, установленным в резцедержателе токарного станка, — помимо обычного движения продольной подачи $D_{спр}$ сообщают с помощью специального устройства дополнительные движения ΔS с относительно небольшой амплитудой. Изменяя значения скорости вращения изделия, продольной подачи упрочняющего инструмента, а также амплитуду и частоту колебаний, можно получать на обрабатываемой поверхности требуемый рисунок.

Благодаря вибронакаtywанию не только повышается износостойкость, но и упрочняется поверхность деталей машин.

4.4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ПОКРЫТИЯ

Поверхностные покрытия весьма разнообразны по методам нанесения их на поверхность. Рассмотрим некоторые покрытия, получившие наибольшее практическое применение.

Гальванические покрытия делятся на 4 основные группы:

- защитные — цинковые, кадмисвые, свинцовые, оловянные, никелевые, а также защитные пленки, получаемые путем фосфотирования и оксидирования;
- защитно-декоративные — медные с последующей отделкой, никелевые, хромовые, кобальтовые, серебряные, золотые и родиевые;
- покрытия для повышения сопротивления механическому изнашиванию и увеличения поверхностной твердости — хромовые, железные, никелевые;

- покрытия для восстановления размеров деталей — хромовые (размерное хромирование с последующей доводкой), железные, медные.

Рассмотрим подробнее покрытия, которые изменяют физико-механические свойства изделий, т. е. покрытия, относящиеся к первой и третьей группам.

Цинковое покрытие делает поверхность коррозионно-стойкой. Оцинкованные стальные листы, водопроводные трубы, крепеж, проволока, работающие в различных климатических условиях, закрытых помещениях с умеренной влажностью, в атмосфере, загрязненной сернистым газом, не подвергаются коррозии. Цинковое покрытие применяется также для защиты изделий из черного металла от действия бензина и масла (бензобаки, бензо- и маслопроводы).

Коррозионную стойкость в морской воде изделия приобретают после кадмирования. Свинцовое покрытие служит для защиты от коррозии, вызываемой воздействием серной кислоты, сернистых газов.

Никелевое покрытие без подслоя меди применяется для защиты от коррозии химической и электрохимической аппаратуры, соприкасающейся с щелочной средой, а также для медицинского инструмента.

Для защиты от коррозии стальных изделий, использующихся в закрытых помещениях с неагрессивной коррозионной средой, применяют оксидирование.

Серебряное покрытие применяется для защиты от коррозии изделий, соприкасающихся с щелочными растворами (химическая аппаратура), для повышения электропроводящих свойств поверхности контактов и отражательной способности рефлекторов фар и прожекторов.

Родисвое покрытие используют для повышения отражательной способности изделий.

Электролитические покрытия медью, оловом, кадмием уменьшают микрошероховатости в связи с резким увеличением коэффициента трения. Поэтому они применяются для кадмирования болтов и посадочных поверхностей соединений с натягом, лужения опорных поверхностей вкладышей.

Хромирование повышает износостойкость и долговечность деталей, применяется для деталей, не подвергаемых большим местным давлениям, а выходящим из строя вследствие изнашивания. Хромовое покрытие стали без подслоя меди и никеля применяется также для повышения поверхностной твердости.

Для повышения поверхностной твердости трущихся деталей и сопротивления механическому изнашиванию применяют также никелевое покрытие сталей (без подслоя меди).

Пластмассовые покрытия позволяют использовать высокие антифрикционные или фрикционные, компенсирующие и демпфирующие свойства пластмасс и уменьшить влияние их недостатков, а именно холодной ползучести, низкой теплопроводности, большого температурного расширения и влагопоглощения.

4.5. УПРОЧНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ ХИМИКО-ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКОЙ

Повышение твердости и прочности поверхностного слоя, повышение износостойкости и коррозионной стойкости, а в некоторых случаях и усталостной прочности деталей машин достигается еще и химико-термической обработкой. Рассмотрим наиболее широко применяемые для этих целей процессы.

Азотирование (прочностное) применяется для деталей машин, работающих в условиях трения и знакопеременных нагрузок изгиба (шейки коленчатых валов быстроходных двигателей, рабочее зеркало гильз цилиндров, клапаны, седла клапанов, толкатели двигателей внутреннего сгорания, шестерни авиационных двигателей, точные детали топливной аппаратуры, шпиндели быстроходных станков). Азотирование применяется также для повышения износостойкости мерительных инструментов (резьбовые и гладкие пробки и кольца, плоские калибры, скобы, шаблоны). Разновидностью процесса является антикоррозионное азотирование, применяемое для малонагруженных деталей, изготавливаемых из углеродистой и низколегированной стали. При этом в поверхностном слое должна обеспечиваться максимальная концентрация азота. Углеродистая сталь после азотирования при 650 °С в течение 3 ч не корродирует в воде в течение 720 ч.

Цианирование — процесс химико-термической обработки, вследствие которой происходит насыщение поверхностного слоя стали одновременно углеродом и азотом. Цианирование осуществляют после закалки и низкого отпуска, в результате повышается твердость и прочность поверхностного слоя, износостойкость и усталостная прочность. Применяется для инструментов из быстрорежущей стали (протяжки, сверла, зенкеры, метчики, развертки, фрезы) и для деталей машин (болты, гайки, винты, валики, шестерни, рычаги).

Резкое повышение сопротивления схватыванию, износостойкости и прирабатываемости сталей и чугунов достигается **сульфоцианированием**, т. е. насыщением поверхностных слоев азотом, углеродом и серой. Сульфоцианирование применяют для фрикционных дисков, цилиндров, ходовых винтов.

Чугунные гильзы цилиндров и поршневые кольца подвергают **сульфидированию** (насыщению поверхностных слоев серой). В результате такой обработки повышается износостойкость и прирабатываемость. Сульфидирование режущих инструментов повышает период стойкости режущих инструментов из быстрорежущих сталей Р9 и Р18 в 2—3 раза.

Диффузионная металлизация — насыщение поверхностного слоя стали алюминием, хромом, кремнием, бором с целью придания ей высокой жаропрочности, антикоррозионных свойств и износостойкости. Наивысшая по сравнению с другими видами упрочнений твердость 1 500... 1 800 НV (значительно выше твердости кварца) и износостойкость достигаются **борированием**. Борирование используется для кондукторных втулок и режущих инструментов. Его весьма эффективно применять для деталей, работающих в абразивных средах; инструмент может работать при температуре 800 °С, не теряя твердости и не изнашиваясь.

Высокой жаропрочностью (до 850... 900 °С) отличаются поверхностные слои деталей после **алитирования**. Область применения алитирования: чехлы термопар, реторты для цианирования, тигли соляных ванн, топливники газогенераторов, чугунные колосники, трубы для крекинга нефти, выхлопные трубы.

4.6. УПРОЧНЕНИЕ ХОДОВЫХ ВИНТОВ

К ходовым винтам прежде всего предъявляют высокие требования по износостойкости, которая обычно обеспечивается высокой твердостью после закалки. Однако повысить износостойкость ходовых винтов можно современными методами упрочнения. Одним из таких методов является **азотирование**. Азотированные ходовые винты обладают существенно более высокой износостойкостью, чем закаленные; в испытаниях при работе с загрязненной абразивом смазкой азотированные винты из сталей 40ХФА и 30ХЗВА изнашивались в 1,75 раза меньше, чем закаленные винты, изготовленные из стали ХВГ (54... 58 HRC). Поэтому объемная закалка может быть рекомендована для ходовых винтов пониженной жестко-

сти, винтов с малым шагом резьбы и при необходимости упрочнения какой-либо его части. Упрочненные ходовые винты необходимы для металлорежущих станков, в том числе специальных, предназначенных для нарезания резьбы.

Другой метод упрочнения ходовых винтов — **электромеханический**, при котором совмещается обкатка резьбы (наклеп) с термической обработкой тонких поверхностных слоев при нагреве электротоком.

Даже в условиях абразивного изнашивания после электромеханического упрочнения износостойкость ходового винта может увеличиться в 2—5 раз (в зависимости от материала винта).

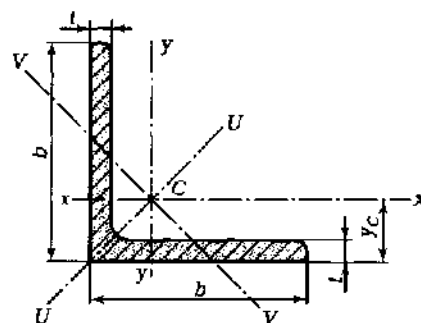
Сохранение точности передачи ходовой винт — гайка в большей мере зависит от износостойкости резьбы винта, а не гайки. Поэтому гайки рекомендуется изготавливать из бронз или цинкового сплава ЦАМ10-5, так как по сравнению с чугунами они меньше изнашивают винт. Гайки для винтов поперечной подачи токарных станков для чистовых операций могут изготавливаться из текстолита марок ПТ или ПТК.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие способы изменения механических свойств материалов вы знаете?
2. Для чего применяется обкатывание наружных поверхностей тел вращения?
3. Назовите методы упрочнения пластическим деформированием поверхностных слоев детали.
4. Какие способы повышения износостойкости поверхностей трущихся деталей вы знаете?
5. Назовите химико-термические процессы, используемые для повышения жаропрочности деталей.
6. Какие методы повышения износостойкости ходовых винтов вы знаете?
7. Как можно повысить коррозионную стойкость материала детали?
8. Для какой цели используется хромирование?

Приложение I

УГОЛКИ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ РАВНОПОЛОЧНЫЕ (ПО ГОСТ 8509—93)

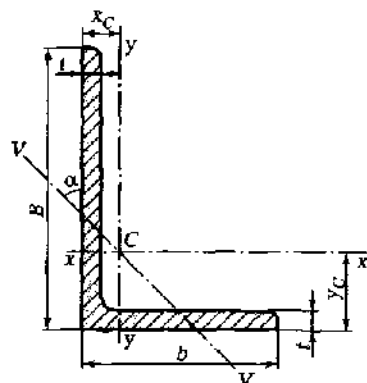


S — площадь поперечного сечения
 J — момент инерции
 i — радиус инерции
 y_c — координата центра тяжести сечения

№ уголка	Масса 1 пог. м, кг	Размеры		S , см ²	J_x , см ⁴	i_x , см	$J_{U_{max}}$, см ⁴	$i_{U_{max}}$, см	$J_{V_{min}}$, см ⁴	$i_{V_{min}}$, см	y_c , см
		b , мм	t , мм								
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	1,38
	3,77		5	4,80	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	1,52
	4,25		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	1,57

6,3	3,90	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	1,78
7	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
	6,39		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,39	1,94
7,5	5,80	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10
8	7,36	80	6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	2,51
10	10,8	100	7	13,8	131	3,8	207	3,88	54,2	1,98	2,71
	12,2		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	2,75
	15,1		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	2,83
	17,9		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	2,91
11	11,9	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
	13,5		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
12,5	15,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	3,36
	17,3		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40
	19,1		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
	22,7		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53

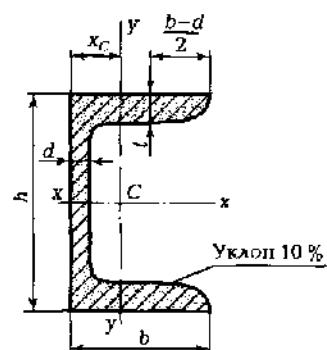
УГОЛКИ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ НЕРАВНОПОЛОЧНЫЕ (ПО ГОСТ 8510—86*)

 S — площадь поперечного сечения J — момент инерции i — радиус инерции x_c, y_c — координаты центра тяжести сечения

№ швеллера	Масса 1 пог. м, кг	Размеры			$S, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_y, \text{см}^4$	$i_y, \text{см}$	$J_{\text{min}}, \text{см}^4$	$i_{\text{min}}, \text{см}$	$x_c, \text{см}$	$y_c, \text{см}$	$\text{tg } \alpha$
		$B, \text{мм}$	$b, \text{мм}$	$t, \text{мм}$										
4,5/2,8	1,68	45	28	3	2,14	4,41	1,48	1,32	0,79	0,72	0,61	0,64	1,47	0,387
	2,20			4	2,80	5,68	1,42	1,69	0,78	1,02	0,60	0,68	1,51	0,379
5/3,2	1,90	50	32	3	2,42	6,18	1,60	1,99	0,91	1,18	0,70	0,72	1,60	0,403
	2,49			4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,76	1,65	0,401
5,6/3,6	2,81	56	36	4	3,58	11,37	1,78	3,70	1,02	2,19	0,78	0,84	1,82	0,406
	3,46			5	4,41	13,82	1,77	4,48	1,01	2,65	0,78	0,88	1,87	0,404

6,3/4,0	3,17	63	40	4	4,04	16,33	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,91	2,03	0,397
	3,91			5	4,98	19,91	2,00	6,26	1,12	3,73	0,86	0,95	2,08	0,396
	4,63			6	5,90	23,31	1,99	7,25	1,11	4,36	0,86	0,99	2,12	0,393
	6,03			8	7,68	29,60	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	1,07	2,20	0,386
7/4,5	4,39	70	45	5	5,59	27,76	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	1,05	2,28	0,406
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,81	2,39	12,41	1,43	7,24	1,09	1,17	2,39	0,436
	5,69			6	7,25	40,92	2,38	14,00	1,42	8,48	1,08	1,21	2,44	0,435
	7,43			8	9,47	52,38	2,35	18,52	1,40	10,87	1,07	1,29	2,52	0,430
8/5	4,49	80	50	5	6,36	41,60	2,56	12,68	1,41	7,57	1,09	1,13	2,60	0,387
	5,92			6	7,55	43,98	2,55	14,85	1,40	8,88	1,08	1,17	2,65	0,386
9/5,6	6,17	90	56	5	7,86	65,28	2,88	19,67	1,58	11,77	1,22	1,26	2,92	0,384
	6,70			6	8,54	70,58	2,88	21,22	1,58	12,70	1,22	1,28	2,95	0,384
	8,77			8	11,18	90,87	2,85	27,08	1,56	16,29	1,21	1,36	3,04	0,380
10/6,3	7,53	100	63	6	9,58	98,29	3,20	30,58	1,79	18,20	1,38	1,42	3,23	0,393
	8,70			7	11,09	112,86	3,19	34,99	1,78	20,83	1,37	1,46	3,28	0,392
	9,87			8	12,57	126,96	3,18	39,21	1,77	23,38	1,36	1,50	3,32	0,391
	12,14			10	15,47	153,95	3,15	47,18	1,75	28,34	1,35	1,58	3,40	0,387
11/7	8,98	110	70	6,5	11,45	142,42	3,53	45,61	2,00	26,94	1,53	1,58	3,55	0,402
	10,93			8	13,93	171,54	3,51	54,64	1,98	32,31	1,52	1,64	3,61	0,400
12,5/8	11,04	125	80	7	14,06	226,53	4,01	73,73	2,29	43,40	1,76	1,80	4,01	0,407
	12,58			8	15,98	255,62	4,00	80,95	2,28	48,82	1,75	1,84	4,05	0,406
	15,47			10	19,70	311,61	3,98	100,47	2,26	59,33	1,74	1,92	4,14	0,404
	18,34			12	23,36	364,79	3,95	110,84	2,24	69,47	1,72	2,00	4,22	0,400
14/9	14,13	140	90	8	18,00	363,68	4,49	119,79	2,58	70,27	1,98	2,03	4,49	0,411
	17,46			10	22,24	444,45	4,47	145,54	2,58	85,51	1,96	2,12	4,58	0,409

ШВЕЛЛЕРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ СЕРИИ У (ПО ГОСТ 8240-97)



S — площадь поперечного сечения

J — момент инерции

W — момент сопротивления

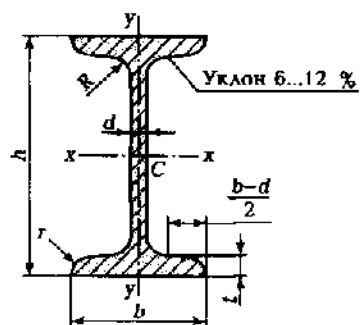
i — радиус инерции

x_c — координата центра тяжести сечения

№ швеллера	Масса 1 пог. м, кг	Размеры				S , см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	x_c , см
		h , мм	b , мм	d , мм	t , мм								
5У	4,84	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,10	1,92	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5У	5,90	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	8,70	3,68	1,08	1,24
8У	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	12,8	4,75	1,19	1,31
10У	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	6,46	1,37	1,44

12Y	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	31,2	8,52	1,53	1,54
14Y	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	45,4	11,0	1,70	1,67
16Y	14,2	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	63,3	13,8	1,87	1,80
16aY	15,3	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	78,8	16,4	2,01	2,00
18Y	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	86,0	17,0	2,04	1,94
18aY	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	105	20,0	2,18	2,13
20Y	18,4	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	113	20,5	2,20	2,07
22Y	21,0	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	151	25,1	2,37	2,21
24Y	24,0	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	208	31,6	2,60	2,42
27Y	27,7	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	262	37,3	2,73	2,47
30Y	31,8	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	327	43,6	2,84	2,52
33Y	36,5	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	410	51,8	2,97	2,59
36Y	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	513	61,7	3,10	2,68
40Y	48,3	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	642	73,4	3,23	2,75

ДВУТАВРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ (ПО ГОСТ 8239—89)



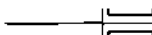
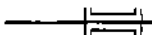
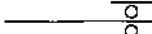
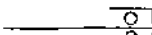
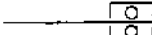
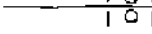
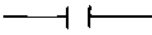
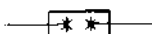
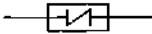
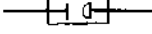
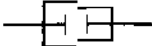
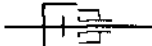
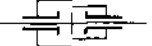
S — площадь поперечного сечения
 J — момент инерции
 W — момент сопротивления
 i — радиус инерции

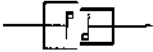
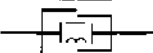
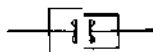
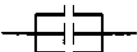
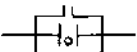
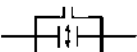
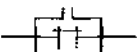
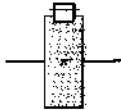
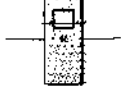
№ дву- тавра	Размеры, мм						S , см ²	Масса 1 м, кг	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
	h	b	d	t	R	r								
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1 290	143,0	7,42	82,6	18,40	1,88
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1 840	184,0	8,28	115,0	23,10	2,07
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2 550	232,0	9,13	157,0	28,60	2,27

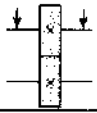
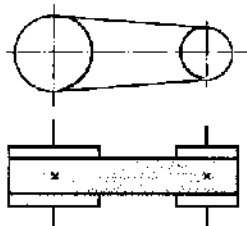
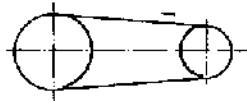
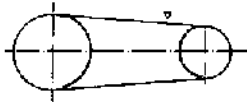
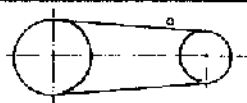
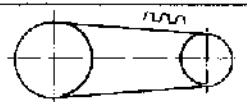
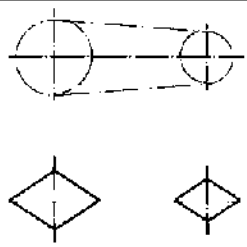
ПРИЛОЖЕНИЕ V

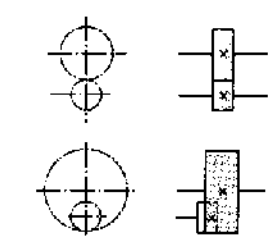
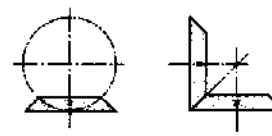
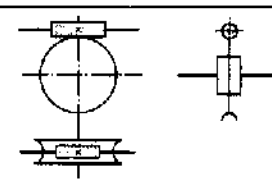
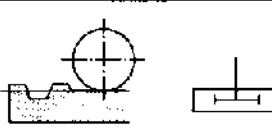
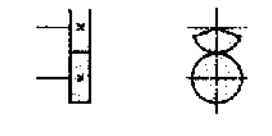
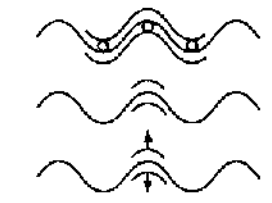
ОБОЗНАЧЕНИЯ УСЛОВНЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ В СХЕМАХ. ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ (ПО ГОСТ 2.770-68*)

Наименование	Условные обозначения
Вал, ось, стержень	—
Неподвижное звено (для указания неподвижности любого звена часть его контура покрывают штриховкой)	
Соединение частей звена: неподвижно неподвижно, допускающее регулировку неподвижное соединение детали с валом, стержнем	
Кинематическая пара: вращательная поступательная винтовая сферическая (шаровая)	
Подшипники скольжения и качения на валу (без уточнения типа): радиальные упорные	

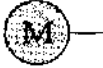
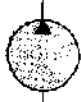
Наименование	Условные обозначения
Подшипники скольжения: радиальные радиально-упорные: односторонние двусторонние упорные: односторонние двусторонние	    
Подшипники качения: радиальные радиально-упорные: односторонние двусторонние упорные: односторонние двусторонние	    
Муфта (общее обозначение без уточнения типа)	
Муфта нерасцепляемая (неуправляемая): глухая упругая компенсирующая	  
Муфта сцепляемая (управляемая): общего назначения односторонняя двусторонняя	  

Наименование	Условные обозначения
Муфта сцепляемая механическая: синхронная (например, зубчатая) асинхронная (например, фрикционная)	 
Муфта сцепляемая электрическая	
Муфта сцепляемая гидравлическая или пневматическая	
Муфта автоматическая (самодействующая): общего назначения обгонная (свободного хода) центробежная фрикционная предохранительная с разру- шающимся элементом	   
Тормоз (общее обозначение без уточнения типа)	
Храповые зубчатые механизмы: с наружным зацеплением односторонние с внутренним зацеплением односторонние	 
Кулачки плоские: продольного перемещения вращающиеся	   

Наименование	Условные обозначения
Передачи фрикционные с цилиндрическими роликами	
Шкив ступенчатый, закрепленный на валу	
Передача ремнем (без уточнения типа ремня)	
Передача плоским ремнем	
Передача клиновидным ремнем	
Передача круглым ремнем	
Передача зубчатым ремнем	
Передача цепью (общее обозначение без уточнения типа цепи)	

Наименование	Условные обозначения
Передачи зубчатые цилиндрические (без уточнения типа зубьев): внешнее зацепление внутреннее зацепление	
Передачи зубчатые с пересекающимися валами — конические без уточнения типа зубьев	
Передачи зубчатые со скрещающимися валами — червячные с цилиндрическим червяком	
Передачи зубчатые реечные (без уточнения типа зубьев)	
Передачи зубчатым сектором (без уточнения типа зубьев)	
Винт, передающий движение	
Винт — гайка качения Винт — гайка скольжения: гайка неразъемная гайка разъемная	

Окончание прил. V

Наименование	Условные обозначения
Электродвигатель	
Насос (без уточнения типа)	

Список литературы

1. **Александров А. В.** Сопротивление материалов : учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. — 2-е изд., испр. — М. : Высш. шк., 2000. — 560 с.
2. **Аркуша А. И.** Руководство к решению задач по теоретической механике : учеб. пособие для студентов машиностр. спец. сред. спец. учеб. заведений / А. И. Аркуша. — 5-е изд., испр. — М. : Высш. шк., 2002. — 354 с.
3. **Аркуша А. И.** Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов : учеб. пособие для студентов машиностр. спец. сред. спец. учеб. заведений / А. И. Аркуша. — 4-е изд., испр. — М. : Высш. шк., 2002. — 354 с.
4. **Бать М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах : Статика и кинематика : учеб. пособие для вузов / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. — 10-е изд., перераб. и доп. — СПб. : Политехника, 1995. — 669 с.
5. **Бутенин Н. В.** Курс теоретической механики : учеб. пособие для вузов : В 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. А. Лунц, Д. Р. Меркин. — 5-е изд., испр. — СПб. : Лань, 2002. — 735 с.
6. **Ицкович Г. М.** Сопротивление материалов : учебник для вузов / Г. М. Ицкович. — 9-е изд., испр. и доп. — М. : Высш. шк., 2001. — 386 с.
7. **Кузнецов Н. Г.** Детали машин : учебник для техникумов / Н. Г. Кузнецов, Г. С. Кузнецова, В. К. Житков. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Илекса, 1999. — 392 с.
8. **Решетов Д. Н.** Детали машин / Д. Н. Решетов. — М. : Машиностроение, 1989. — 496 с.
9. **Руководство к решению задач по сопротивлению материалов : учеб. пособие для вузов / Г. М. Ицкович, А. С. Минин, А. И. Винокуров ; под ред. А. С. Минина.** — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Высш. шк., 2001. — 591 с.
10. **Сборник задач по теоретической механике с решениями : Статика, кинематика : учеб. пособие : В 2 ч. / [В. А. Акимов, О. Н. Скляр, А. А. Федута, А. В. Чегирев].** — Минск : Технопринт, 2001. — 365 с.
11. **Феодосьев В. И.** Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. — 592 с. — [Сер. Механика в техническом университете. Т. 2].
12. **Эрдеди А. А.** Детали машин : учебник для машиностр. спец. вузов / А. А. Эрдеди, Н. А. Эрдеди. — М. : Изд. центр «Академия», 2001. — 288 с.
13. **Яблонский А. А.** Курс теоретической механики : учеб. пособие для вузов / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. — 7-е изд., стер. — СПб. : Лань, 1998. — 763 с.

Оглавление

Основные используемые обозначения	4
Введение	5
Глава 1. Теоретическая механика	8
1.1. Основные понятия и аксиомы статики	8
1.2. Связи и их реакции	11
1.3. Плоская система сил	15
1.4. Элементы теории трения	23
1.5. Пространственная система сил	26
1.6. Определение центра тяжести	32
1.7. Кинематика точки	39
1.8. Простейшие движения твердого тела	45
1.9. Сложное движение точки	54
1.10. Сложение двух вращательных движений	58
1.11. Законы динамики, уравнения движения материальной точки. Принцип Д'Аламбера	66
1.12. Силы, действующие на точки механической системы	70
1.13. Теорема о движении центра масс механической системы	72
1.14. Работа силы	75
1.15. Мощность	80
1.16. Коэффициент полезного действия	81
1.17. Моменты инерции твердого тела	82
1.18. Теоремы об изменении количества движения материальной точки и механической системы	84
1.19. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки	90
1.20. Теорема об изменении кинетического момента механической системы	92
1.21. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки	94
1.22. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела	96
1.23. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси	96
Глава 2. Основы сопротивления материалов	99
2.1. Основные понятия	99
2.2. Растяжение и сжатие	101
2.3. Основные механические характеристики материалов	108
2.4. Расчеты на прочность при растяжении и сжатии	110

2.5. Срез и смятие	111
2.6. Кручение	114
2.7. Прямой поперечный изгиб	120
2.8. Определение перемещений при изгибе	144
2.9. Теория предельных напряженных состояний	150
2.10. Понятие о сопротивлении усталости	160
2.11. Прочность при динамических нагрузках	168
2.12. Устойчивость при осевом нагружении стержня	170
2.13. Раскрытие статической неопределимости стержневых систем	180
Глава 3. Детали и механизмы машин	191
3.1. Машины и их основные элементы	191
3.2. Основные критерии работоспособности и расчета деталей машин	194
3.3. Машиностроительные материалы	202
3.4. Детали вращательного движения	207
3.5. Корпусные детали	208
3.6. Пружины и рессоры	211
3.7. Неразъемные соединения деталей	213
3.8. Разъемные соединения деталей	233
3.9. Подшипники скольжения	247
3.10. Подшипники качения	253
3.11. Муфты	256
3.12. Фрикционные передачи	260
3.13. Ременные передачи	261
3.14. Зубчатые передачи	270
3.15. Червячные передачи	288
3.16. Цепные передачи	300
3.17. Винт—гайка скольжения	308
3.18. Винт—гайка качения	312
3.19. Реечные передачи	314
3.20. Кривошипно-шатунные механизмы	316
3.21. Кулисные механизмы	317
3.22. Кулачковые механизмы	319
3.23. Общие сведения о редукторах	320
Глава 4. Изменение механических свойств материалов	325
4.1. Основные способы изменения механических свойств	325
4.2. Упрочняющая обработка пластическим деформированием	326
4.3. Повышение износостойкости поверхностных слоев	328
4.4. Поверхностные покрытия	329
4.5. Упрочнение поверхностных слоев химико-термической обработкой	331
4.6. Упрочнение ходовых винтов	332
Приложения	334
Список литературы	347

Учебное издание

**Вереина Людмила Ивановна,
Краснов Михаил Михайлович**

Техническая механика

Учебник

8-е издание, стереотипное

Редактор *Е. И. Черных*
Технический редактор *Е. Ф. Коржуева*
Компьютерная верстка: *Р. Ю. Волкова*
Корректор *С. Ю. Свиридова*

Изд. № 108105951. Подписано в печать 03.04.2014. Формат 60 × 90/16.
Гарнитура «Балтика». Бумага офс. № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 22,0.
Тираж 5 000 экз. Заказ № 5868.

ООО «Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru
129085, Москва, пр-т Мира, 101В, стр. 1.
Тел./факс: (495) 648-0507, 616-00-29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение № РОСС RU. АЕ51. 11 16476 от 05.04.2013.



Отпечатано в ОАО «Можайский полиграфический комбинат»
143200, г. Можайск, ул. Мира, 93.

www.oaoimk.ru, www.oaoimk.ru тел.: (495) 745-84-28, (49638) 20-685

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА



Издательский центр «Академия»
www.academia-moscow.ru